

北海道における貯留関数法の貯留指数に関する研究

Study on storage exponent of storage function model in Hokkaido

北海学園大学工学部 ○学生員 櫻谷 政和 (Masakazu Sakuraya)
 北海学園大学工学部 鈴木 純平 (Junpei Suzuki)
 (株) 登 寿 フェロー 柳屋 圭吾 (Keigo Yanagiya)
 北海学園大学工学部 正 員 嵯峨 浩 (Hiroshi Saga)

1. まえがき

貯留関数法は木村によって開発された優れた流出解析モデルであり、現在でも日本の河川計画において幅広く用いられている。貯留関数法は連続の式と貯留方程式を組み合わせ、数値積分することによって流出量を計算する方法である。一般に $(S \sim Q)$ 曲線は、ループ（二価性）を描き非線形となるが、木村はこれを一価の非線形関数として定式化している。これが木村の貯留方程式と呼ばれるものである。この貯留方程式では、貯留指数 p は Manning 則に従うと 0.6 となり、一般に確定値として取り扱われている。しかし、実際の $(S \sim Q)$ 曲線は、流域やイベントごとに異なり、 $p=0.6$ として一様に扱うことに疑問を持たざるを得ない。貯留係数や貯留指数を降雨データと流出量データを用いて数学的に最適化すれば解決することではあるが、貯留指数は冪指数であるため、ニュートン法などの一般的な最適化手法ではかなり困難な問題となる。これが今まで貯留指数を一定値として扱ってきた理由である。

$(S \sim Q)$ 曲線の二価性を表現した貯留方程式としてプラサド¹⁾ や星²⁾ のモデルがあるが、いずれも非線形性を表現するのに木村の貯留方程式を踏襲している。したがって、流出解析において木村の貯留指数の最適値を探ることは今後の流出解析に非常に有効であると思われる。

本研究は、北海道内の一級河川 13 水系の降雨・流出量データ³⁾ (466 例) から $(S \sim Q)$ 曲線を作成して実際の p 値を調べ、流出解析に有用な貯留指数の値を検討したものである。具体的には、 $(S \sim Q)$ 曲線のどの部分を採用して p を決めるのがよいのかを損失項を含む木村の貯留関数法により、その解析精度を判断基準として検討している。

2. $S \sim Q$ 曲線における貯留指数 p の決定方法

図-1 は $(S \sim Q)$ 曲線とハイドログラフの対応を示した概念図である。ループを描く曲線に対して $S = KQ^p$ で近似する場合、ループの上側に重みをおくとハイドログラフ立ち上がり部分の、下側におくとハイドログラフ減水部の情報を含むことになる。一見すると中央に位置する曲線が一番フィットしそうであるが、流出解析をする場合、ハイドログラフのどの部分を再現しようとするか、その目的によって変わってくると考えたほうが妥当である。図-2 は幌糠における昭和 50 年 8 月 24 日の出水による $(S \sim Q)$ 曲線である。貯留高 S の小さい部分と大

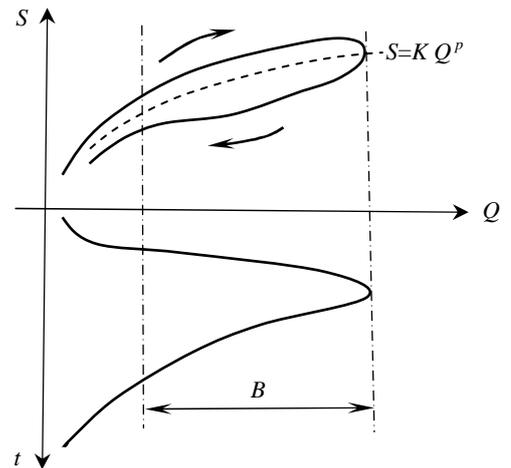


図-1 $(S \sim Q)$ 曲線の概念図

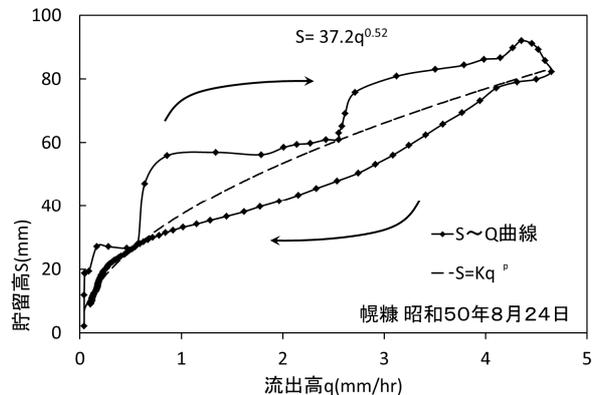


図-2 幌糠昭和50年8月24日 $(S \sim Q)$ 曲線

きい部分では形態がかなり異なることがよくわかる。このように $(S \sim Q)$ 曲線のどの部分を採用するかによって、貯留指数 p が変わってくる。

一方、貯留高 S は次式で算出される。

$$\frac{dS}{dt} = r - q \quad \therefore S = \int_1^t r dt - \int_1^t q dt \quad \dots (1)$$

実際には、降雨・流出高ともに離散値であるから n 時の貯留高 S_n は次式で求めることができる。

$$S_n = \sum_{i=1}^n r_i - \sum_{i=1}^n q_i \quad \dots (2)$$

表—1 道内 13 水系の貯留指数と調整貯留指数の値

水系	貯留指数 p	個数	調整貯留指数 p	個数	水系	貯留指数 p	個数	調整貯留指数 p	個数
釧路川水系	0.9282	27	0.4440	27	常呂川水系	0.9494	36	0.4316	36
後志利別川水系	0.7981	23	0.4294	23	渚滑川水系	0.7480	22	0.4497	22
沙流川水系	1.0877	45	0.7774	45	留萌川水系	0.5371	12	0.4839	12
十勝川水系	1.0570	59	0.5533	57	網走川水系	0.9213	37	0.1774	37
尻別川水系	0.8758	59	0.3350	57	石狩川水系	0.9212	18	0.4386	18
天塩川水系	1.0141	69	0.5898	69	湧別川水系	0.9385	25	0.4768	25
鶴川水系	0.8544	34	0.5693	33					
13 水系全体の貯留指数の平均値 (μ) と標準偏差 (σ)					$\mu \pm \sqrt{\sigma^2}$	0.939 ± 0.416	466	0.487 ± 0.502	461

図中の破線は全データを用いて、このような場合の常套手段である最小二乗法で求めた貯留方程式 $S=Kq^p$ の近似曲線である。最小二乗法による K と p は (3) 式で求められる。

$$K = \exp \left\{ \frac{\sum X \sum Y - \sum X \sum XY}{N \sum x^2 - (\sum X)^2} \right\} \dots (3)$$

$$p = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{N \sum x^2 - (\sum X)^2}$$

ここに、 $X = \ln q$, $Y = \ln S$, N : 流量標本数

本研究では、大規模出水を対象にピーク流量付近の再現性を重視する立場で以下のような方法で p を決定した。

- a) 図—1 のようにピーク流量 (q_{peak}) からの範囲 B を対象とする。すなわち、流量の小さいデータは使用しない。
- b) $B=q_{peak}(1-1/n)$ として B を求め、この範囲で p の値を求める。 n は 2、2.5、3、3.5、4、5 として検討する。
- c) 後述の損失項を有する貯留関数法によって、流出解析を行い解析精度のよい n を決定する。

以上の方法で検討した結果、 n は 30% ($n=2.5\sim 3.5$) 程度となった。表—1 はハイエト・ハイドログラフすべのデータで求めた p 値と本研究の方法で求めた $n=3.5$ の場合の p 値 (以後、調整貯留指数と記す) を示したものである。ピーク流量付近を重視すると、水系全体で p は 0.487 程度となり、従来扱われてきた $p=0.6$ より非線形性が強くなっているのがわかる。イベント数は 466 例であるが、調整貯留指数では 5 例減っている。これは p がマイナスの値になったものを棄却したことによる。

3. 損失項を有する木村の貯留関数法の構築

貯留指数 p の最適値を決定するための判断基準として、貯留指数を有する木村の貯留関数法による解析精度を採用した。ただし、星⁴⁾ や嵯峨⁵⁾ により開発された直列二段型貯留関数法では損失項が配置されていることと観測降雨および観測流量を使用するため、木村モデルに損失項を付加している。支配方程式は (1) 式である。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r(t) - q(t) - z(t) \\ S(t) = K \cdot q(t)^p \\ z = \alpha \cdot q(t) \end{cases} \dots (1)$$

ここに、 $S(t)$: 貯留高 (mm) 、 $r(t)$: 観測降雨強度 (mm/hr) 、 $q(t)$: 観測流出高 (mm/hr) 、 $z(t)$: 浸透高 (mm/hr) 、 K : 貯留係数、 p : 貯留指数、 α : 浸透孔係数

(1) 式より解くべき方程式は (2) 式となり、この式は非線形微分方程式であるから、線形化して漸化式法⁶⁾ によって解くことになる。ここで、数学的に最適化する未知パラメーターは K および W であり、 p は ($S \sim Q$) 曲線から求めた値を使用し、確定値として扱う。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{Kp} \{r(t) - W \cdot q(t)\} q(t)^{1-p} \dots (2)$$

ここに、 $W = (1 + \alpha)$

最適化手法⁶⁾ として、感度係数を用いたニュートン法を採用した。目的関数は (3) 式で定義される。

$$MinJ = \sum_{j=1,2,3,\dots,N} e_j^2 \dots (3)$$

ここで、
$$e_j = \frac{q_j^* - q_j}{\sqrt{q_j^*}}$$

q_j^* : 観測流出高、 q_j : 計算流出高、 N : 流量標本数
ニュートン法における ($m+1$) ステップ時の未知パラメーターは次式で算出される。 m は計算過程におけるステップ数を示し、 ΔP^m は補正値を示す。

$$P^{m+1} = P^m + \Delta P^m \dots (4)$$

ここで、
$$P^m = \begin{bmatrix} K^m \\ W^m \end{bmatrix}, \Delta P^m = \begin{bmatrix} \Delta K^m \\ \Delta W^m \end{bmatrix}$$

補正値 ΔP^m は、(5) 式によって算出される。

$$\begin{bmatrix} \sum v_{j,1}^2 & \sum v_{j,1}v_{j,2} \\ \sum v_{j,1}v_{j,2} & \sum v_{j,2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta K \\ \Delta W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum e_j v_{j,1} \\ \sum e_j v_{j,2} \end{bmatrix} \dots (5)$$

表—2 p=0.6 と調整貯留指数の違いによる解析精度の比較

水系	HS 値 (%)		KH 値 (%)		ERJ 値	
	p=0.6	調整 p	p=0.6	調整 p	p=0.6	調整 p
釧路川水系	39.81	34.28	19.81	16.58	0.033	0.027
後志利別川水系	48.76	45.86	27.34	25.02	0.194	0.177
沙流川水系	29.39	31.22	18.89	20.35	0.051	0.056
十勝川水系	33.31	29.91	22.65	32.79	0.059	0.051
渚滑川水系	42.74	37.93	26.08	23.33	0.063	0.052
常呂川水系	40.89	36.80	27.72	24.37	0.064	0.059
尻別川水系	36.48	31.91	23.98	18.21	0.062	0.046
石狩川水系	37.61	32.95	27.86	22.09	0.104	0.073
天塩川水系	39.74	37.85	25.09	22.93	0.066	0.055
鶴川水系	42.74	40.35	23.35	21.45	0.081	0.079
網走川水系	37.96	34.90	21.42	17.49	0.023	0.026
湧別川水系	42.58	38.54	26.25	23.02	0.063	0.052
留萌川水系	63.74	60.21	29.56	28.54	0.136	0.128
誤差平均値	38.97	35.95	23.97	22.74	0.068	0.060

ここで、

$$v_{j,1} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial K}, \quad v_{j,2} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial W} \quad \dots (6)$$

(6) 式は感度係数であり、効率よく補正值 ΔP^m を求めるために導入される。

(4) 式を繰り返し計算し、(7) 式で示される条件を満たしたならば収束と判断する。ε は 1% とした。

$$\varepsilon \geq \left| \frac{\Delta P^m}{P^m} \right| \quad \dots (7)$$

解析精度の評価基準は (8) 式 (KH 値) と (9) 式 (HS 値) の相対誤差および (10) 式 (ERJ 値) を用いた。KH 値と HS 値はハイドログラフ全体の解析精度誤差を、ERJ 値は目的関数値の平均値を表す。いずれの値も小さい方が解析精度に優れていることを示す。

$$KH = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N |q^*(i) - q_{cal}(i)|}{q^*(i)} \quad \dots (8)$$

$$HS = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\{q^*(i) - q_{cal}(i)\}^2} / N}{q_{av}} \quad \dots (9)$$

$$ERJ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\{q^*(i) - q_{cal}(i)\}^2}{q^*(i)} \quad \dots (10)$$

ここで、 $q^*(i)$: i 時の観測流出高、 $q_{cal}(i)$: i 時の計算流出高、 q_{av} : 観測流出高の平均値、N : 流量標本数

4. 流出解析による調整貯留指数の検証

本手法で求めた調整貯留指数と p=0.6 と固定した貯留指数を用いて流出解析を行い、解析精度を比較した。

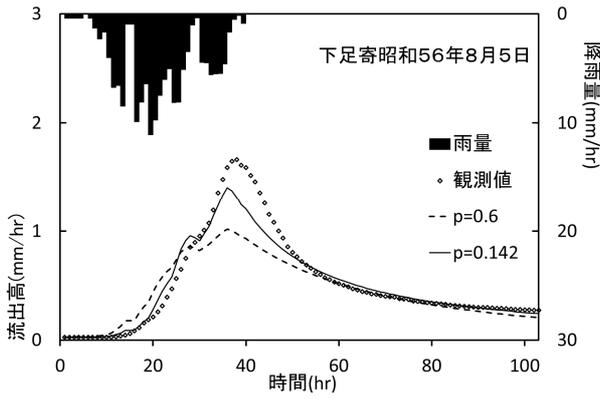
次項の図—3 から図—10 に計算結果のハイドログラフを示す。図—10 以外は貯留指数が 0.6 より小さい場合であり、その結果、ピーク流出高の再現性が極めて向上している。図—10 は p=0.634 の場合であるが、再現性が逆に悪くなっている。実際にはもう少し小さな p が適切であると思われる。表—2 は道内一級河川 13 水系のおよそ 460 例の流出解析精度を示している。調整貯留指数を用いて精度が悪くなっているのは沙流川水系のすべての誤差と十勝川水系での KH 値であり、そのほかはすべて解析精度が向上している。このような結果を見ると、実際の流出では Manning 則を仮定するよりも非線形性が強い現象であると解釈でき、p=0.6 に拘らないことで流出解析精度を向上させることを示唆していると思われる。

5. 謝辞

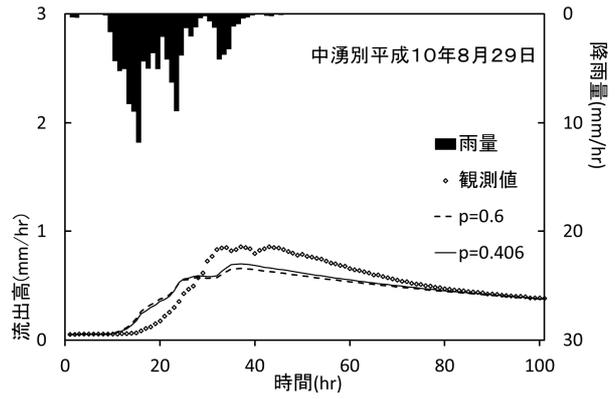
膨大な数の (S~Q) 曲線の作図や調整貯留指数の計算は、本研究室配属の卒研究生、中平智貴君と森麻琴君によった。ここに記して謝意を表す。

参考文献

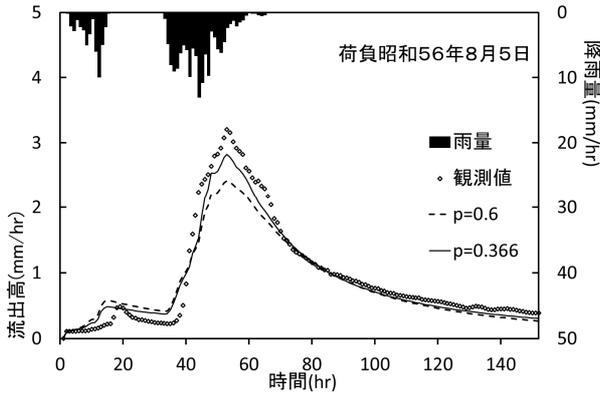
- 1) Prasad : A nonlinear hydrologic system response model. Proc. ASCE, Vol. 93, pp.202-221, 1967.
- 2) 星、山岡 : 雨水流法と貯留関数法の相互関係、第 26 回水理講演会論文集、pp.273-278、1982.
- 3) 嵯峨浩 : 道内一級河川 13 水系の洪水データ集、北海学園大学、2001.
- 4) 園山、星 : 2 段タンク型貯留関数モデルの同定手法の改良、北海道開発土木研究所月報、No.589、pp.7-18、2002.
- 5) Saga, Hoshi and Hashimoto : A new tank model coupled with the storage routing method. Proc. of XX Nordic Hydrological Conference, Vol. II, pp.605-614, 1998.
- 6) 若手水文学研究会 : 現場のための水文学、北海道開発局開発土木研究所、1994.



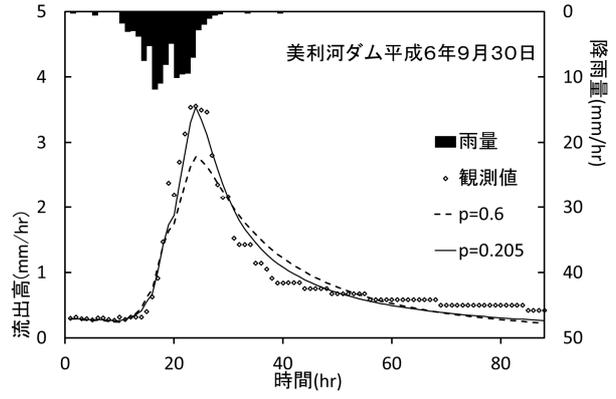
図—3 計算結果



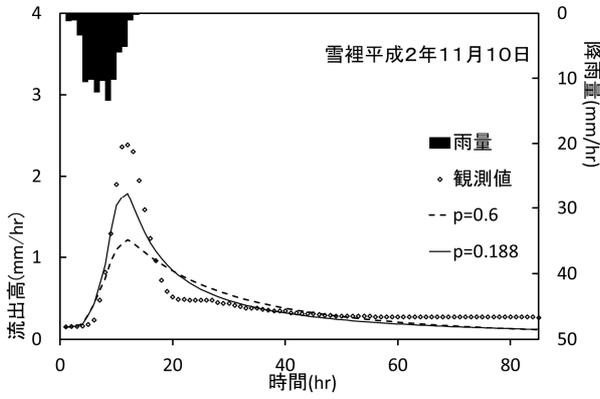
図—7 計算結果



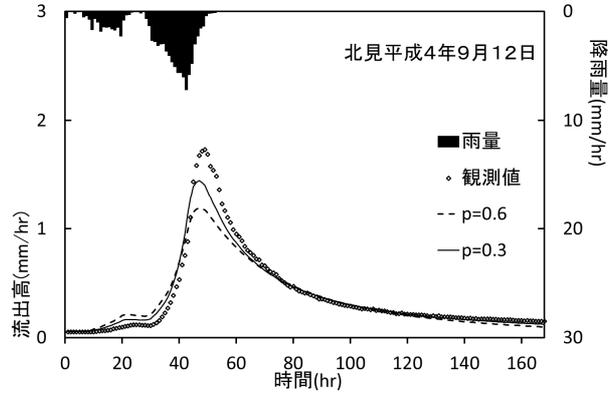
図—4 計算結果



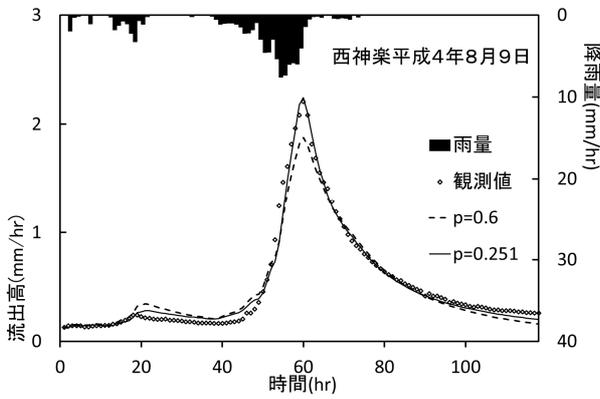
図—8 計算結果



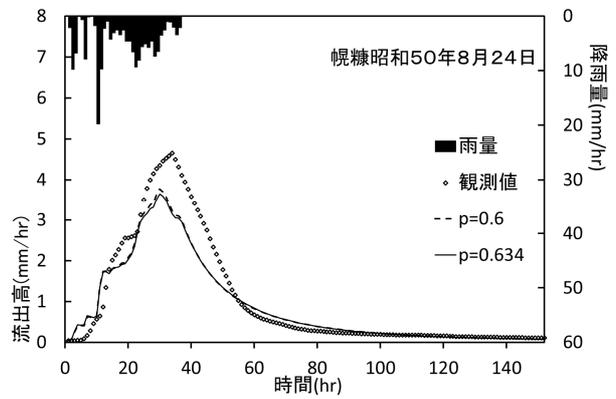
図—5 計算結果



図—9 計算結果



図—6 計算結果



図—10 計算結果