

むだ時間の概念を流出解析に導入した場合の効果に関する研究

Study on effect in case of introducing the concept of dead time into the simple storage function model having permeable mechanism

北海学園大学工学部 ○学生員 森 智昭 (Tomoaki Mori)
 北海学園大学工学部 白岩 太朗 (Taro Shiraiwa)
 (株)登 寿 フェロー 柳屋 圭吾 (Keigo Yanagiya)
 北海学園大学工学部 正 員 嵯峨 浩 (Hiroshi Saga)

1. まえがき

むだ時間とは「入力があっても出力が全くない時間」と定義され、自動制御系などの入力-出力系では重要な概念として取り扱われている。一方、降雨流出系では降雨波形と出力波形の主要な部分の遅れが「遅れ時間」として流出解析モデルに反映されてきた。しかし、未だむだ時間を導入した研究は嵯峨ら^{1), 2)}のみであり、著者らの知る限りほかでは見当たらない。

著者らは前報²⁾で、線形貯留関数法(単位図法)にむだ時間の概念を導入する手法とその効果を定量的に示した。しかし、計算に用いたデータは有効降雨と直接流出成分であり、観測値をそのまま用いるモデルへの適用が不可欠であると考えられる。近年、損失項を含む貯留関数法³⁾が発表され、使いやすさと計算精度の向上から観測データをそのまま使う手法が多用されているからである。本報告は、観測データをそのまま用いる流出解析モデルにむだ時間を導入し、その効果を検証したものである。使用した流出解析モデルは、もっとも簡便な単位図法に損失項を加えたものであり、このモデルを採用した理由は、むだ時間の導入効果をよりよく把握するためである。

2. むだ時間の概念と特性

むだ時間は上述のように入力があっても出力が全くない時間と定義されるが、降雨-流出系では出力が全く存在しないことはほとんどあり得ない現象である。これは水位観測点においても降雨があるため、遅れが発生しないうちに雨水が観測点に到着してしまうからである。このようなことが降雨流出現象にむだ時間が導入されなかった大きな原因であると思われる。

むだ時間の降雨-流出系における概念としては、雨水が降雨代表地点から水位観測所到達までに要する時間であると考えられる。なお、分布定数型流出モデルでは、河道流下時間や降雨分布を考慮できているので、むだ時間の概念が存在しないことは当然のことである。

むだ時間の特性としては、嵯峨¹⁾が既に明らかにしているなのでその結果を(1)式に示す。

$$L = (n+1) \frac{\int_0^L q(t) dt}{\left[\frac{1}{k} \int_0^L r(t) dt \right]^{\frac{1}{p}}} \quad \dots (1)$$

ここで、 L : むだ時間、 k, p : 斜面流定数、 n : ハイド

ロググラフ立ち上がり部分を近似した放物線の次数

すなわち、 $t=L$ までの累加流量を一定とした場合、ハイドログラフの立ち上がりが急なほど L が小さくなり、降雨開始時に強度の強い雨が降ると L が小さくなることを示している。

3. 流出モデルとむだ時間の導入方法

むだ時間を組み込む流出モデルとして、 $S \sim Q$ 曲線が線形かつ一価関数であるとした貯留方程式を用いた。このモデルはもっとも簡便で単位図法と同等であり、損失を考慮すると次のような連続の式と貯留方程式になる。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r(t) - q(t) - z(t) \\ S(t) = K \cdot q(t) \\ z = \alpha \cdot q(t) \end{cases} \quad \dots (2)$$

ここに、 $S(t)$: 貯留高 (mm)、 $z(t)$: 浸透高 (mm/hr)、 K : 貯留係数、 α : 浸透孔係数、 $r(t)$: 観測降雨 (mm/hr)、 $q(t)$: 観測流出高 (mm/hr)

このモデルを採用した理由は、もっともシンプルでむだ時間の効果を評価しやすいこととむだ時間を無理なく導入できるからである。

貯留関数法は連続の式と貯留方程式を組み合わせた微分方程式を数値積分して解くことになるから、解くべき方程式は(3)式となる。

$$\begin{cases} K \frac{dq}{dt} + (1 + \alpha) \cdot q(t) = r(t) \\ K \frac{dq}{dt} + W \cdot q(t) = r(t) \end{cases} \quad \dots (3)$$

ここに、 $W = (1 + \alpha)$ である。

むだ時間を考慮する方法は以下のように行う。

本来、入力があると直ちに出力が発生するのがむだ時間のないシステムである。むだ時間を L とすると、むだ時間がある場合は、出力が L 時間だけ遅れて出現することになる。したがって、(3)式の $q(t)$ を $q(t+L)$ と置き換えることによって容易にむだ時間を導入することができる。すなわち、(4)式を解けばよいことになる。

$$K \frac{dq(t+L)}{dt} + W \cdot q(t+L) = r(t) \quad \dots (4)$$

さらに、 $q(t+L)$ を Taylor 級数展開すると、

$$q(t+L) = q(t) + L \frac{dq(t)}{dt} + \frac{L^2}{2!} \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \dots \quad (5)$$

(5) 式を (4) 式に代入することで、解を得ることは可能である。また、(5) 式の右辺第何項まで採用するかという問題は残るが、本研究ではむだ時間を考慮しないモデルを L なしモデル、右辺第 2 項まで採用したモデルをモデル①、右辺第 3 項までの場合をモデル②とする。それぞれの貯留関数の方程式は以下ようになる

$$KL \frac{d^2q}{dt^2} + (K + WL) \frac{dq}{dt} + Wq = r \quad \dots (6)$$

$$\frac{KL^2}{2} \frac{d^3q}{dt^3} + (KL + \frac{WL^2}{2}) \frac{d^2q}{dt^2} + (k + WL) \frac{dq}{dt} + Wq = r \quad \dots (7)$$

すなわち、むだ時間を考慮しないモデルが (3) 式、モデル①が (6) 式、モデル②が (7) 式である。(5) 式の右辺をどの項まで採用したとしても、(5) ~ (7) 式の未知パラメーターは K と L および W だけであり、出力の主要な部分の遅れを K で、むだ時間を L で表すことになり、入力-出力系の遅れ要素をすべて取り込んだことになる。また、損失高を W で取り込むので、観測データをそのまま使うことができる。

4. 未知パラメーターの数学的最適化手法と評価基準

本研究では、未知パラメーターを数学的に最適化する方法⁴⁾として、感度係数を用いたニュートン法を採用した。目的関数は(8)式で定義される。

$$MinJ = \sum e_j^2, \quad j=1,2,3,\dots,N \quad \dots (8)$$

ここで、
$$e_j = \frac{q_j^* - q_j}{\sqrt{q_j^*}}$$

q_j^* : 観測流出高 (mm/hr)、 q_j : 計算流出高 (mm/hr)、 N : 流量標本数

ニュートン法における $(m+1)$ ステップ時の未知パラメーターは次式で算出される。 m は計算過程におけるステップ数を示し、 ΔP^m は補正値を示す。

$$P^{m+1} = P^m + \Delta P^m \quad \dots (9)$$

ここで、
$$P^m = \begin{bmatrix} K^m \\ L^m \\ W^m \end{bmatrix}, \quad \Delta P^m = \begin{bmatrix} \Delta K^m \\ \Delta L^m \\ \Delta W^m \end{bmatrix}$$

補正値 ΔP^m は、(10) 式によって算出され、効率よく算定できる成分回帰手法を併用した。 T は転置を意味する。

$$\Delta P^m = [X^T X]^{-1} [X^T E] \quad \dots (10)$$

ここで、
$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{N,1} & x_{N,2} & x_{N,3} \end{bmatrix}$$

ただし、

$$x_{j,1} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial K}, \quad x_{j,2} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial L}, \quad x_{j,3} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial W}$$

(9) 式を繰り返し計算し、(11) 式で示される条件を満たしたならば収束とする。 ϵ は 1% とした。

$$\epsilon \geq \left| \frac{\Delta P^m}{P^m} \right| \quad \dots (11)$$

感度係数は (12) 式で示され、未知パラメーターの変化に対する流出高の変化を表し、効率よく補正値 ΔP^m を求めるために導入される。

$$\frac{\partial q}{\partial K}, \quad \frac{\partial q}{\partial L}, \quad \frac{\partial q}{\partial W} \quad \dots (12)$$

感度係数は次式の U を求めることによって容易に算出される。

$$\frac{dU}{dt} = AU + D \quad \dots (13)$$

A : 係数マトリックス、 D : 係数ベクトル

ここで、(5) 式の右辺第 n 項まで採用した場合は

$$U = \left[\frac{\partial y_1}{\partial K} \quad \frac{\partial y_1}{\partial L} \quad \frac{\partial y_1}{\partial W} \quad \frac{\partial y_2}{\partial K} \quad \frac{\partial y_2}{\partial L} \quad \frac{\partial y_2}{\partial W} \quad \dots \quad \frac{\partial y_n}{\partial K} \quad \frac{\partial y_n}{\partial L} \quad \frac{\partial y_n}{\partial W} \right] \quad \dots (14)$$

$$y_1 = q, \quad y_2 = \frac{dq}{dt} \quad \dots \quad y_n = \frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}}$$

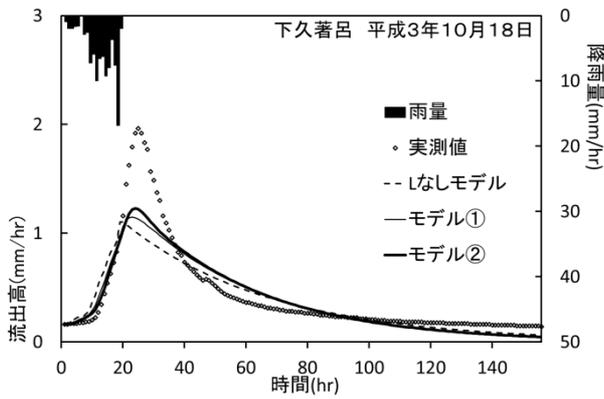
感度係数の式はモデルによってそれぞれ異なるが、誘導過程はすべて同じである。なお、参考文献4)、5)に詳述されているので参照されたい。

解析精度の評価基準は(15)式 (KH 値)と(16)式 (HS 値)の相対誤差および(17)式 (ERJ 値)を用いた。 KH 値と HS 値はヒドログラフ全体の解析精度の誤差を、 ERJ 値は目的関数の平均値を表す。いずれの値も小さい方が解析精度がよいことを示す。

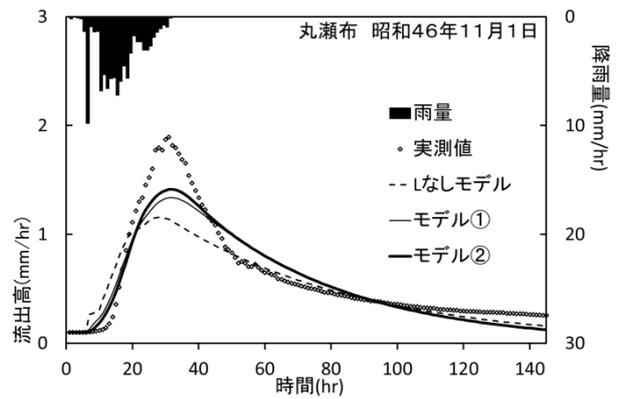
$$KH = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N |q^*(i) - q_{cal}(i)|}{q^*(i)} \quad \dots (15)$$

$$HS = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\{q^*(i) - q_{cal}(i)\}^2} / N}{q_{av}} \quad \dots (16)$$

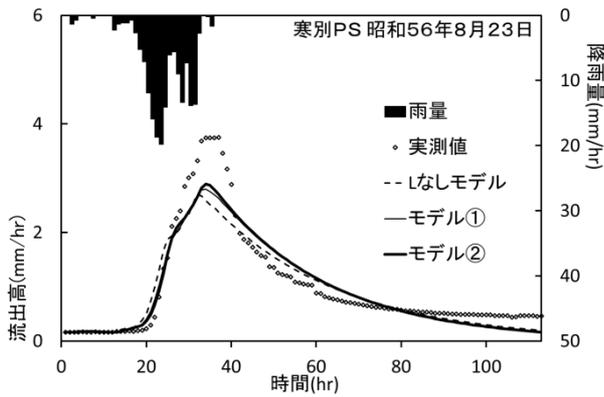
$$ERJ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\{q^*(i) - q_{cal}(i)\}^2}{q^*(i)} \quad \dots (17)$$



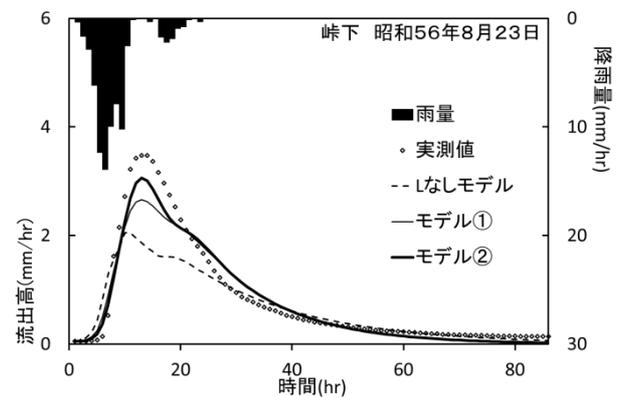
図—1 計算結果



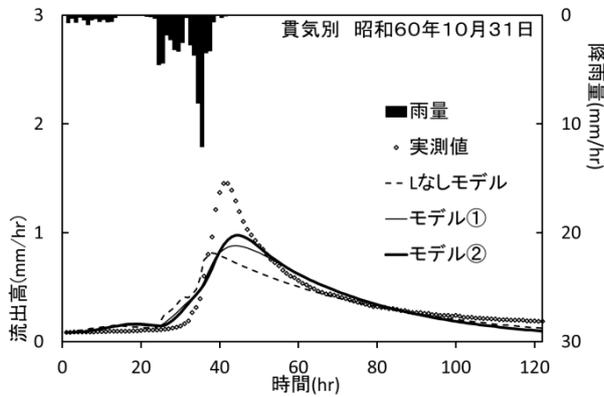
図—4 計算結果



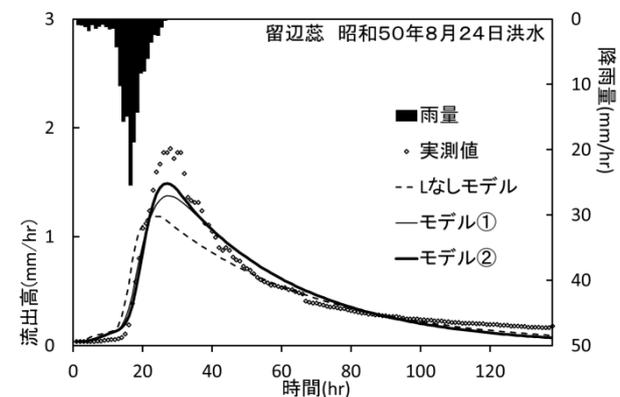
図—2 計算結果



図—5 計算結果



図—3 計算結果



図—6 計算結果

表—1 全水系における各モデルの流出高ピーク時間差 (hr)

水系	Lなしモデル	モデル①	モデル②	水系	Lなしモデル	モデル①	モデル②
釧路川水系	4.25	3.15	2.75	石狩川水系	3.50	1.83	1.00
後志利別川水系	1.83	1.17	1.50	天塩川水系	2.73	3.27	2.80
沙流川水系	4.26	3.45	2.87	鶴川水系	4.61	3.54	3.46
十勝川水系	3.32	3.18	2.95	網走川水系	4.21	2.50	1.88
渚滑川水系	4.00	3.86	3.76	湧別川水系	4.83	4.08	4.50
常呂川水系	4.23	3.67	4.33	留萌川水系	2.75	1.00	1.63
尻別川水系	3.28	2.18	1.97				
13 水系全体の流出高ピーク時間差					3.60	2.95	2.88

表—2 全水系における各モデルの解析精度評価差

水系	HS 値 (%)			KH 値 (%)		
	Lなしモデル	モデル①	モデル②	Lなしモデル	モデル①	モデル②
釧路川水系	32.61	30.96	30.34	23.79	23.76	23.72
後志利別川水系	40.65	35.43	33.41	27.97	30.01	27.00
沙流川水系	33.41	25.09	22.49	22.94	18.78	16.89
十勝川水系	33.57	29.65	27.94	25.38	24.08	23.02
渚滑川水系	36.02	24.77	22.20	27.19	21.12	17.33
常呂川水系	38.01	30.36	25.82	29.46	24.14	20.96
尻別川水系	38.39	32.83	30.91	29.07	26.70	25.28
石狩川水系	34.15	28.35	26.54	24.97	23.12	21.92
天塩川水系	34.81	28.72	25.60	21.97	19.06	17.77
鶴川水系	36.26	28.05	25.36	22.73	19.35	17.42
網走川水系	38.43	28.07	24.27	26.11	21.52	19.09
湧別川水系	38.64	24.26	19.83	30.81	21.60	16.81
留萌川水系	64.16	42.70	35.53	41.19	40.95	37.03
誤差平均値	38.39	29.94	26.94	27.20	24.17	21.86

4. 観測値によるむだ時間導入効果の検証

むだ時間の導入効果を検証するため、道内一級河川 13 水系の観測値⁶⁾を用いて流出解析を行った。解析結果の一例を図—1 から図—6 に示す。解析数で一番少ないのは後志利別川水系の 3 例、一番多いのは沙流川水系の 31 例で総数は 251 例である。流域面積は 42km^2 から 2851km^2 の範囲である。一般に、貯留関数法などの集中定数モデルは中小流域で用いるものであるが、むだ時間の効果を確認するため、あえて大流域でも解析を行った。

計算結果を見るといずれも流量ピーク付近の整合性が悪くなっている。これは流出モデルとしてもっとも単純な線形貯留関数法を用いているためであり、モデルの限界による結果である。むだ時間の効果として一番期待されるのはハイドログラフ立ち上がり部分であるが、残念ながらその効果を定量的に評価するのは非常に難しい。しかし、目視ではあるが、いずれの計算結果でもむだ時間を導入したモデル①、モデル②の計算結果が立ち上がり部分を改善していることがわかる。

降雨流出系の遅れ現象の改善効果を定量的に把握できるのは、観測流出高と計算流出高のピーク発生時刻の差である。表—1 は 13 水系ごとに三つのモデルで解析した結果の観測値と計算値の平均ピーク時間差を示したものである。13 水系全体ではむだ時間を考慮しない場合、peak to peak の時間差は 3.6 時間であるが、導入したモデル①では 2.95 時間に縮小し、モデル②では 2.88 時間に減少している。水系ごとでは天塩川水系と常呂川水系の結果が悪くなっているが、これらを除くすべての水系では改善されているのがわかる。このようにむだ時間を導入することによって、観測値と計算値のハイドログラフ立ち上がり部分だけでなく、流出高ピーク発生時刻も改善された結果となっている。

表—2 は 13 水系ごとの誤差評価を示したもので (15) 式と (16) 式で定義されたハイドログラフ全体の観測値と計算値の相対誤差である。緑に着色した欄が三つのモ

デルのなかで最小の誤差であることを示している。

HS 値はすべての水系で、KH 値は後志利別川水系のモデル①を除いて解析誤差が縮小し、モデル②が一番よい解析結果となっている。水系全体の平均値では L なしモデルの HS 値が 38.39% からそれぞれ 29.94%、26.94% に減少し、KH 値も 27.20% から 24.17%、21.86% になっている。このように、計算値のハイドログラフ立ち上がり部分と流出高ピーク発生時刻が改善されることによって、計算値全体の精度が改善されているのがわかる。

5. 最後に

むだ時間を導入すると入力～出力系におけるすべての遅れ要素を考慮したことになり、解析精度を向上させることが可能であることを明らかにした。むしろ、本報告で検証に採用した解析モデルは単純な線形貯留関数法であるため、現段階では一般的な流出解析モデルに即座に応用することは無理である。今後、非線形貯留関数法にむだ時間を導入する手法を追求していくつもりである。

参考文献

- 1) 嵯峨浩：周波数応答法による流出解析、土木学会論文集、No.393/II-9、pp.77-86、1988-5.
- 2) 中村、阿部、柳屋、嵯峨：むだ時間の概念を導入した流出解析手法に関する研究、北海道支部論文報告集 第 70 号、B-51、2014-2.
- 3) 田中、藤田、清水：損失機構を含む貯留関数法に関する研究、北海道支部論文報告集、第 53 号(B)、pp.54-59、1997.
- 4) 若手水文学研究会：現場のための水文学、北海道開発局開発土木研究所、1994.
- 5) 嵯峨浩：流出解析モデルと計算手法、第 40 回水工学に関する夏期研修会講義集、pp.A-1-1-A-1-20、2004.
- 6) 嵯峨浩：道内一級河川 13 水系の洪水データ集、北海学園大学、2001.