

弾性拘束された線状構造に生じる螺旋座屈形態の解析的検討

Helical Buckling Analysis of Rod Restrained by an Elastic Medium

北海道大学大学院工学院
北海道大学大学院工学研究院

○学生員 原澤祥典 (Shosuke Harasawa)
正 員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

梁が軸方向に荷重を受けることによって座屈を生じることが一般的に広く知られている。座屈する部材が拘束を受けている場合、諸条件により座屈形態が単なる湾曲ではなく螺旋形状となる場合がある¹⁾²⁾。これは土中埋設パイプや光ファイバ心線等の意図せぬ三次元的な座屈現象として知られているが³⁾、詳細なメカニズムは未解明な部分が多い。本研究では、弾性拘束されている円形断面の線状部材が単に軸方向の収縮を受ける場合⁴⁾に加え、モーメント力および部材のねじれの影響を考慮したモデルにおいて、拘束条件の変化に伴う螺旋座屈の特異的な変化を構造力学的に検証することを目的とする。

2. 解析モデル

図1は解析対象とする三次元螺旋座屈モデルである。構造中心部に円形断面の線状構造を有し、外側に軟質(弾性体)である内層部分と、硬質で剛体とみなせる外層部分の三重構造モデルを仮定している。本モデルでは中心部の線状構造体が(1)軸方向の荷重(T)、(2)両端のモーメント(M)、(3)線状部材自身のねじれ(τ_i)の三つの力を受け、図1に示す通り三次元的な螺旋座屈が発生するものとする。ここで ρ は螺旋の半径、 $L\cos\beta$ は螺旋のピッチである。また全長を S 、曲線の長さを L としている。

3. 螺旋座屈モデル

本モデルでは図1で示した通り、中央部分とそれを包む内層、外層に分かれた構造を有する。物理的に実現可能な螺旋のパラメータは、モデル全体に発生する全エネルギーが最小になる場合として決定できる。この時、中央部に関する全力学系のひずみエネルギーは(1)軸方向の荷重によるエネルギー V_T 、(2)終端モーメントによるエネルギー V_M 、(3)座屈による曲げエネルギー V_B 、(4)座屈部材のねじれによるエネルギー V_C 、の四つの総和によって決定される。加えて、弾性拘束部となる内層に蓄えられるエネルギー V_E を考慮している。なお、外層部分の弾性エネルギーは硬質で剛体とみなせるため、計算結果に影響を及ぼさないとして除外している。

初めに、軸方向荷重によるエネルギーと終端モーメントによるエネルギーを考える。図1の通り荷重とモーメント力を受ける中央の線状部材は、軸方向に初期長 S から螺旋形状長 $Scos\beta$ に圧縮される。従って、単位長さ辺りの軸方向荷重によるエネルギー V_T 、終端モーメントによるエネルギー V_M はそれぞれ次式で表される⁵⁾。

$$V_T = T \frac{D}{S} = T(1 - \cos\beta) \quad (1)$$

$$V_M = -M \frac{R}{S} = -M \left(\tau_i - \frac{\sin\beta}{\rho} \right) \quad (2)$$

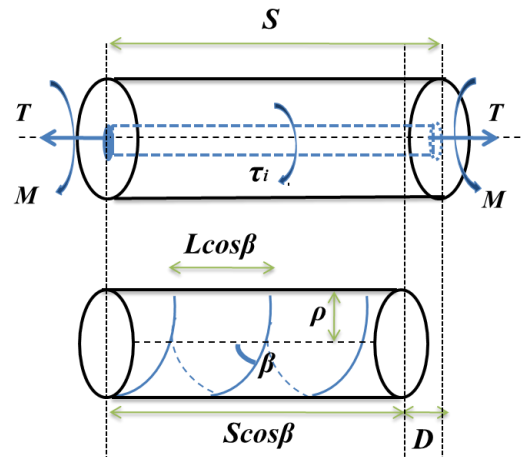


図1 三次元螺旋座屈モデル

次に、螺旋状に座屈した部材の持つエネルギーを考える。図1に示した通り、中央の線状部材は曲げによるエネルギーに加えて自身のねじれによるエネルギーを持つ。従ってこの時の座屈による単位長さ辺りの曲げエネルギー V_B 、座屈部材のねじれによるエネルギー V_C は以下の様に表すことが出来る⁵⁾。

$$V_B = \frac{1}{2S} B S k^2 = \frac{1}{2} \frac{B \sin^4 \beta}{\rho^2} \quad (3)$$

$$V_C = \frac{1}{2S} C S \tau^2 = \frac{1}{2} C \left(\tau_i + \frac{\sin\beta \cos\beta}{\rho} \right)^2 \quad (4)$$

ここで B は曲げ剛性でありヤング率 E と断面2次モーメント I の積で表される。 C はねじり剛性である。

最後に、螺旋座屈に伴い内層部(弾性体)に蓄えられるエネルギーを求める。螺旋座屈によって、変形した中央部材は中央から螺旋半径 ρ だけ変位する。故に横断面内で内層部分の一部は圧縮され、他の一部は逆に引き延ばされることになる。この時の変形が弾性的でありかつ全て横断面内のみで行われるものと仮定すると、この変形と等価な力学モデルとして図2に示すバネモデルとなる。この時、座屈部材が実際の中心より ρ だけ変位した時のバネの全歪エネルギー V_{coil} は、バネ定数を k とすると

$$V_{coil} = \sum \frac{1}{2} k \left[(\text{バネ初期長} - (\text{バネの変位}))^2 \right] \quad (5)$$

で与えられる³⁾。実際の中央部は分布バネ系であるので上式を積分表示して計算を行う。従って単位長さあたりの内層部における弾性歪エネルギー $V_{elastic}$ は(6)で与えられる。

$$V_{elastic} = k \left[\pi(\rho^2 + 2a_1^2) - 4a_1(\rho + a_1)E \left(\frac{2\sqrt{\rho a_1}}{\rho + a_1} \right) \right] \quad (6)$$

ただし

$$E(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varphi^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{第2種完全楕円積分})$$

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{2a+d}{2a-d} \right) E_s \quad (\text{円周方向単位角あたりのバネ定数})$$

E_s : 内層部のヤング率

$$a_1 : a - \frac{d}{2} \quad (a : \text{内層部半径})$$

である。

これら力学系の各エネルギーが求められたので、その総和である全エネルギー V_{total} は次式の通りとなる。

$$\begin{aligned} V_{total} = & T(1 - \cos \beta) - M \left(\tau_i - \frac{\sin \beta}{\rho} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{B \sin^4 \beta}{\rho^2} + \frac{1}{2} C \left(\tau_i + \frac{\sin \beta \cos \beta}{\rho} \right)^2 \\ & + k \left[\pi (\rho^2 + 2a_1^2) - 4a_1 (\rho + a_1) E \left(\frac{2\sqrt{\rho a_1}}{\rho + a_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで物理的に再現可能な螺旋形状は、それを決定するパラメータ ρ , β , τ_i に関してエネルギー変分の原理より

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{total}}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial V_{total}}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial V_{total}}{\partial \tau_i} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

の三つの式を解くことで決定される。本研究では無次元量として式(9)の各式を導入し、計算を行った。

$$\rho_N = \frac{\rho}{a}, \quad D_N = \frac{d}{a}, \quad M_N = \frac{M\rho}{B}, \quad T_N = \frac{T\rho^2}{B}, \quad \alpha = \frac{E_s}{E} \quad (9)$$

ここで α はヤング率比であり、その値が 1 に近いほど弾性拘束が強くなることを示す。 D_N は外層半径と座屈部材の断面直径の比である。また、螺旋形状に関する有力な指標として収縮比 ε を以下のように定義することができる。

$$\varepsilon = \frac{D}{S} = \frac{S - S \cos \beta}{S} = 1 - \cos \beta \quad (10)$$

従って、螺旋傾斜角 β の変化を追うことで螺旋形状の成長と収縮率の関係を知ることが可能となる。

4. 解析結果

ヤング率比 α を 0 (拘束なし) から 1 まで任意に変化させ、終端モーメントの無次元量 M_N 、軸方向荷重の無次元量 T_N をそれぞれ与えることで螺旋傾斜角 β , ρ_N の変化を追っている。ここで、中央部材の直径 D_N は 0.1 と固定している。また、螺旋傾斜角 β は正の値のみを考慮して計算している。

図 3 より、ヤング率比 α が 0 の時、 M_N の値は螺旋傾斜角 β が 0 から増大するに従って同じく増加していることが分かる。しかし一方で、ヤング率比 α が 0 以上の場合、 M_N の値はある一定の傾斜角度 β に達した際に初めて急速に変化することが伺える。そのときの螺旋傾斜角度 β はヤング率比 α が 1 に近づく(拘束が強化される)に従って増加しており、これは拘束強さの変化によって螺旋座屈モードが図 3 の様に変化することを示している。

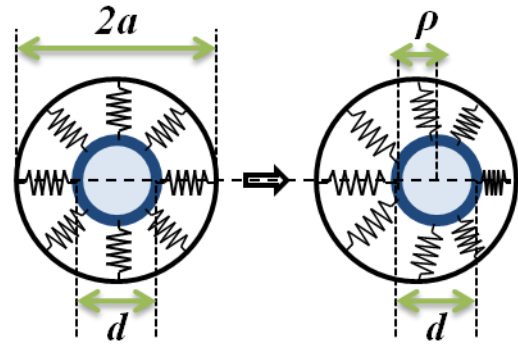


図 2 内層部の等価バネモデル

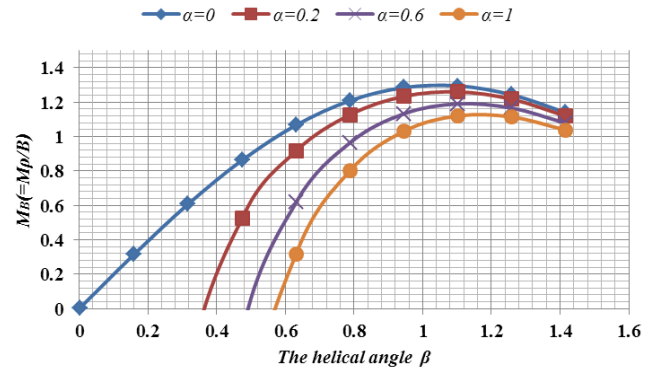


図 3 M_N と螺旋傾斜角度 β の関係

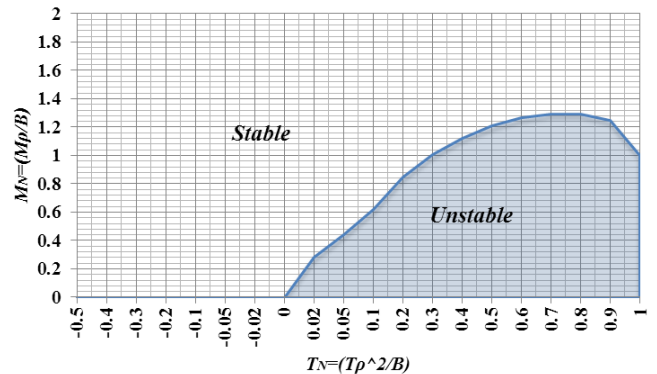


図 4 各 T_N 値に対する M_N の閾値

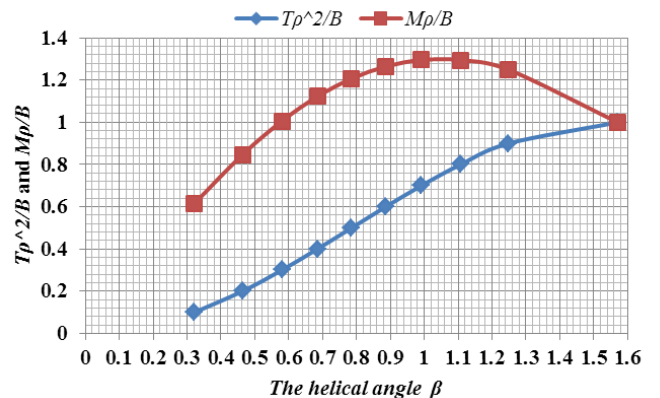


図 5 螺旋傾斜角度 β に対する T_N , M_N の閾値

特に終端モーメント M_N の値が 0 の時(ねじれも無く純粹に軸力だけが作用する場合)には、拘束の有無は顕著に螺旋座屈モードの構築に影響していることが伺える。

次に図4からは、 T_N の値が正(引張力)となる場合、螺旋座屈を生じ得る為に必要な、ある M_N の値があることが示唆される。式(8)より T_N および M_N は螺旋傾斜角度 β の関数になるので、図5に示された通りこの場合 T_N および M_N の各値にそれぞれ対応した螺旋傾斜角度 β が存在する。即ち、螺旋傾斜角度 β に関しても螺旋座屈を生じ得るにはある値より大きい値を持つ必要があると言える。これは急激な螺旋座屈モードが形成されるという結果とも合致している所である。

加えて、こうした螺旋座屈を生じうるのに必要な特定の値(閾値)は拘束の強さ(ヤング率比 α の値)によらず、図4や図5に示された閾値を持つことが分かる。言い換えれば、これは拘束の有無によって螺旋座屈が形成されるポイントは左右されず、一律に図5のように変化していくことが分かる。一方でこうした閾値を持つ現象は T_N の値が負(圧縮力)の場合には見られず、螺旋座屈モードの形成は螺旋傾斜角度 β の増加に従って進行していくことが伺える(図6)。

図6および図7は T_N の値を-0.5(圧縮)、+0.5(引張)とした場合の螺旋半径 ρ_N と螺旋傾斜角度 β の関係をグラフにしたものである。特に図7からは、図4、図5で示された通り、 T_N の値(+0.5)に対応した螺旋傾斜角度 β の閾値(0.785)を持つことが伺える。

また、図6および図7からは拘束が螺旋座屈モードにどのような影響を与えているかを窺い知ることができる。拘束が無い場合($\alpha=0$)螺旋半径 ρ_N と螺旋傾斜角度 β は一定の増分を示すが、拘束がある場合($\alpha>0$)螺旋半径の成長は螺旋傾斜角度 β の増分に対して緩やかであることが伺える。即ち、収縮比 ε の増加や螺旋ピッチ $L\cos\beta$ の増加に対し螺旋半径の変化は小さく抑えられており、これは拘束を受けている線状部材の持つ特徴をよく表していると推察される。

5. まとめ

本研究から以下の知見が得られた。

- ・螺旋座屈モードは拘束を受けている場合、ある一定の値を境に急速に変化する。
- ・ T_N の値が正(引張力)となる場合、螺旋座屈を生じるのに必要な M_N 及び螺旋傾斜角度 β の閾値が存在する。
- ・閾値となる値は拘束の有無(ヤング率比 α の値)によって変化せず、純粋に螺旋傾斜角 β との関係によって決定される。
- ・従って、 $M_N=0$ のケース(純粋に軸力だけを考慮した場合)は T_N の値が正(引張力)の領域では座屈形態が螺旋形態とは成らない。
- ・拘束を受けることで、螺旋半径の増加は螺旋ピッチや収縮率の増加に比べ緩やかになる。これは軸力、モーメント力(ねじれ)のどちらか一方のみを受ける場合でも有効で、拘束が強くなるほど顕著に現れる。
- ・ただし拘束が与える効果は拘束強さ(ヤング率比 α)の増加に伴って次第に小さくなる。

加えて、本研究においては以下の項目の検討を今後の課題として挙げる。

- ・外層半径と座屈部材の断面直径の比 D_N の変化が、螺旋座屈モードに与える影響の詳細な検討。
- ・ T_N の値が正(引張力)のケースにおける、螺旋座屈を生じるのに必要な M_N 及び螺旋傾斜角度 β の閾値に関する更なる検討。

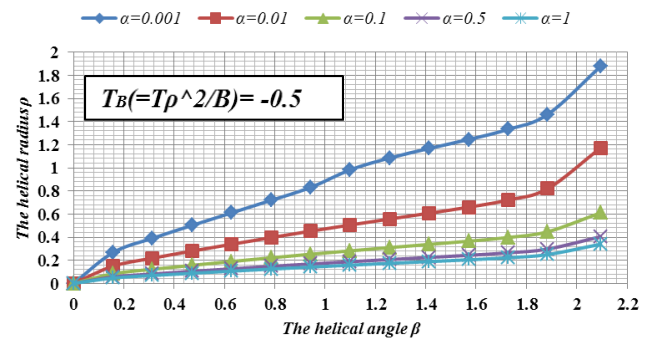


図6 螺旋半径 ρ_N と螺旋傾斜角度 β の関係($T_N=-0.5$)

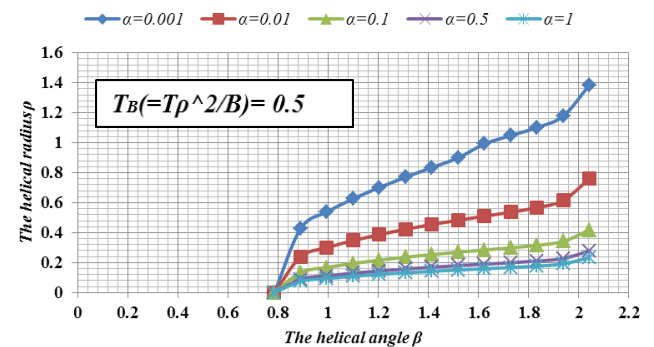


図7 螺旋半径 ρ_N と螺旋傾斜角度 β の関係($T_N=+0.5$)

- ・終端モーメントによるねじれ及び座屈部材の内部ねじれが螺旋座屈モードに与える影響の詳細な検討。
- ・全周拘束以外の多様な拘束条件への対応、及びそれらが螺旋座屈モードに与える影響の更なる検討。
- ・より複雑な螺旋座屈モードに対応した解析モデルの更なる検討及び評価。

謝辞

本研究は科研費若手研究(A)(研究課題番号：2486096、研究代表者：佐藤太裕)により実施されたことを付記し、関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) G.G. Chassie, L.E. Becker and W.L. Cleghorn: Helical buckling of a whirling conducting rod in a uniform magnetic field, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.47, pp.38-53, 2012.
- 2) N.C. Huang and P.D. Pattillo: Helical buckling of a tube in an inclined wellbore Original International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.35, pp. 911-923, 2000.
- 3) S. Tanaka: Fiber Coating Structure and Buckling due to Contraction, 電子通信学会論文誌 Vol.J68-B, No.9, 1985/9.
- 4) S. Harasawa, M. Sato: Helical Buckling of Slender Structure Surrounded by an Elastic Medium, Journal of Mechanics, 2014. (Accepted)
- 5) J. M. T. Thompson, M. Silveira, G. H. M. van der Heijden, M. Wiercigroch: Helical post-buckling of a rod in a cylinder: with applications to drill-strings, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 468(2142), 1591-1614, 2012