

二次元混合ハイブリッド FEM の非定常移流拡散問題への適用とその特性

Characteristics of Two-Dimensional Mixed Hybrid FEM applied to Unsteady Advection and Diffusion Analyses

北海道大学大学院工学院 ○学生員 上田明人 (Akito Ueda)
 北海道大学大学院工学院 学生員 石田湧士 (Yuto Ishida)
 北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)

1. はじめに

本研究は、物質解析を得意とする混合ハイブリッド有限要素法（以下 MHF）を非定常移流拡散問題に適用し、その有効性を評価することを目的としている。

東日本大震災と共に発生した原発事故による放射性物質の流出が問題視されるなか、汚染物質の流出量解析は極めて重要な課題であるといえる。特に、放射性物質においては、その領域にどれだけの量が蓄積されているのか、といった解析が必要となる。しかし、既存手法である有限要素法（以下 FEM）や有限差分法では、各節点間のつり合いから目的変数である濃度を求めるため、不透水層を持つ領域における汚染濃度の分布評価や、その領域に蓄積される汚染物質量の評価を苦手としている。一方、MHF は連続の式を直接離散化していることに加え、要素境界を通る流量を目的変数に持つため、要素毎に蓄積される物質量の厳密な評価が可能となる¹⁾。このことから、MHF は一般的な FEM よりも少ない要素数でも高い精度の解析が可能であると考えられる。

以上より、本研究では不透水層を持つポテンシャル流れ領域における汚染濃度の広がりや、要素毎に蓄積される汚染物質量の解析に関して、FEM と MHF の比較を行い、MHF の有効性の評価を行うことを目的としている。

2. MHF の特徴

2.1 非退化形式と混合形式

一般的な FEM における非定常移流拡散問題の支配方程式は、(2.1)に示すような、目的変数をそれ以上減らすことができない非退化形式で表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi - v \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

ここに、 ϕ は汚染物質の濃度、 u_x , u_y は移流速度（一定）、 v は拡散係数を表す。(2.1)は目的変数が ϕ のみとなっているため、 ϕ を線形補間した場合、その一次導関数である濃度勾配や汚染物質量は一定値で補間される。このように変数の微分関係と補間関数の次数が完全に一致しているものを Complete 型という。

一方、MHF では(2.2)、(2.3)に示すような、Fourier 則と連続の式で表現された混合形式の支配方程式を扱う。

$$v \nabla \phi = -\bar{q} \quad (2.2)$$

$$\nabla \bar{q} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi \quad (2.3)$$

ここに、 $\bar{q}$ は濃度勾配を表す。混合形式では ϕ と $\bar{q}$ の二つの目的変数が存在するため、それぞれに任意の補間関数を与えることができる。例えば、本研究における MHF では、要素内部の ϕ を一定値、 $\bar{q}$ を線形に補間しており、このように変数の微分関係と補間関数の次数が一致していないものを Incomplete 型という。これにより、計算負荷を維持したまま濃度勾配や蓄積量といった目的変数の導関数を高精度で評価することが可能となる。

2.2 目的変数の定義位置と補間関数

一般的な FEM と MHF では目的変数を与える場所が異なる。図-1 に示すように FEM では要素節点に目的変数である ϕ_i が与えられる。一方、MHF では要素境界に濃度 $\bar{\phi}_i$ と物質量 $\bar{Q}_i$ 、また要素代表濃度 Φ_k が与えられる。このように要素境界に物理量を定義することで、各要素の物質収支を適切に評価することが可能となる。

MHF では要素境界上に目的変数を与えているため、(2.4)に示すような、一般的な FEM で用いられる形状関数とは異なる Raviart-Thomas 型形状関数²⁾を適用する。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(\xi+1) & 0 & \frac{1}{4}(\xi-1) \\ \frac{1}{4}(\eta-1) & 0 & \frac{1}{4}(\eta+1) & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \end{Bmatrix} \\ &= [RT] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

MHF では各方向の濃度勾配 $\bar{q}$ を物質量 $\bar{Q}_i$ によって補間する。このため Raviart-Thomas 型形状関数自身がベクトルと次元を持っていることが特徴である。

任意形状の要素に対して(2.4)を適用するためには、正規要素へと変換する必要がある。一般的な FEM では Jacob 行列を利用してスカラー量である濃度を補間する。一方 MHF ではベクトルである濃度勾配を補間するため、(2.5)に示すような変数変換マトリクス $[T_k]$ を適用する。なお、 $[T_k]$ は転置された Jacob 行列と一致する。

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[T_k]} [T_k] [RT] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_i \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

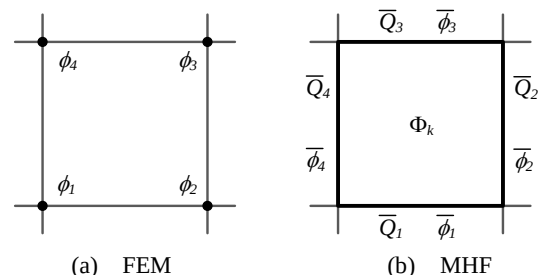


図-1 FEM と MHF の目的変数と定義位置

3. MHF による非定常移流拡散方程式の定式化

最初に (2.2) に示す Fourier 則の離散化を行う．全体に重み関数 δw を乗じて要素全体を積分し，Green の定理を適用すると (3.1) のようになる

$$\int_S v \phi \delta w n dS - \int_{\Omega} v \phi \nabla \delta w d\Omega + \int_{\Omega} \bar{q} \delta w d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

ここに，(3.1) の第一項の ϕ は要素境界上の $\bar{\phi}_i$ ，第二項の ϕ は要素代表値 Φ_k を表す．Galerkin 法を適用すると，(3.2) のように展開される．

$$v \{\bar{\phi}_i\} - v \{\Phi_k\} + [M] \{\bar{Q}_i\} = 0 \quad (3.2)$$

ここに

$$[M] = \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{1}{\det[T_k]} \{RT\}^T [T_k]^T [T_k] \{RT\} d\xi d\eta \quad (3.3)$$

次に (2.3) に示す連続の式の定式化を行う．全体に δw を乗じて領域積分を行う．連続の式ではマスバランスを正確に評価することが狙いであるため，その意に即した有限体積法を適用すると (3.4) となる．

$$\int_S \bar{q} n dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + u_x \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega + u_y \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

移流項である左辺第三項と第四項には Fourier 則を用いる．各項を展開して整理すると (3.5) となる．

$$\{1 - S_i\} \{\bar{Q}_i\} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} A_k \quad (3.5)$$

ここに，

$$\{S_i\} = \frac{1}{v} \int_{\eta} \int_{\xi} \{u_x \quad u_y\} [T_k] [RT] d\xi d\eta \quad (3.6)$$

混合形式の支配方程式である Fourier 則と連続の式を空間方向に離散化した (3.4) と (3.5) を，それぞれ時間方向に離散化することで，定式化を行う．

4. 不透水層を有するポテンシャル流れ領域の解析

4.1 解析モデル

図 - 2 に示すような，不透水層が存在する正方形領域で，逆 U 字型に定常流れが生じているモデルを仮定する．このときに，上流側から汚染濃度 $\phi = 1$ の Dirichlet 条件をパルスで与えた場合の，領域内の濃度分布と要素毎に蓄積される汚染物質流量を評価する．なお，粘性のない非圧縮性流体を仮定する．

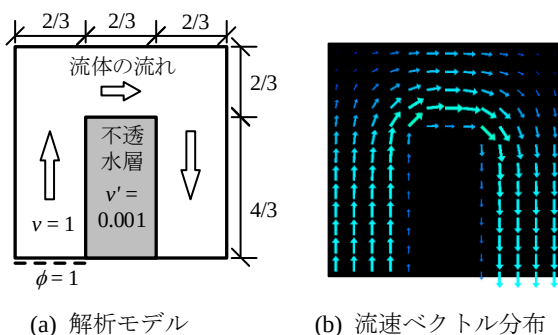


図 - 2 解析モデルと流速ベクトル分布

4.2 解析結果

FEM と MHF による要素濃度分布図を図 - 3 に，また MHF による要素に蓄積される汚染物質の流入量の変化を図 - 4 に示す．図 - 3 より，FEM では不透水層にも汚染物質が流入しているが，MHF では適切に遮断でき，なめらかな解析結果が得られた．また，図 - 4 に示すように，FEM では評価が難しい汚染物質の蓄積量解析において，MHF では直接評価可能である．さらに，流速が遅い領域では，より多くの汚染物質が蓄積されるという事象が明確に表現されており，MHF の再現性の高さが明らかとなった．

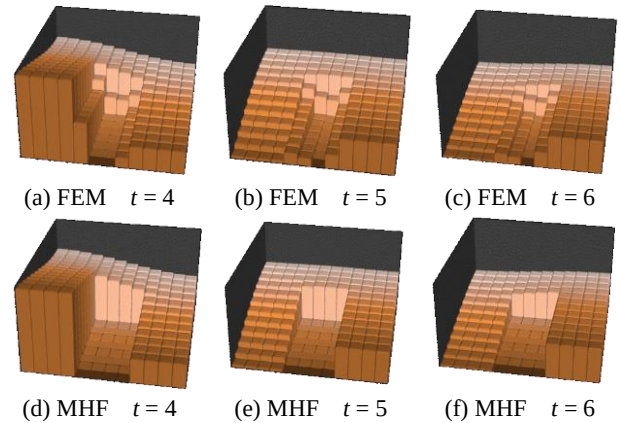


図 - 3 FEM と MHF による時間毎の汚染濃度分布

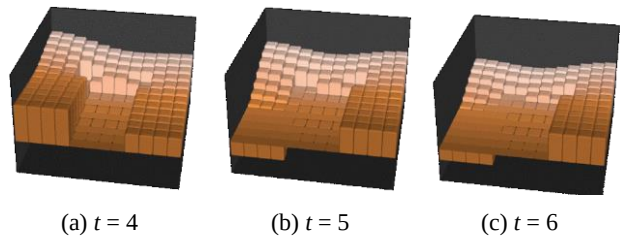


図 - 4 MHF による汚染物質の蓄積量

5. まとめ

本研究によって，MHF における二次元非定常移流拡散方程式の定式化を行った．また，不透水層を有するポテンシャル流れ領域の解析において，MHF は不透水層への汚染物質の流入を適切に遮断できており，FEM よりも再現性の高い評価が可能であることがわかった．加えて，MHF では要素毎に蓄積される物質量を正確に把握することが可能であることがわかった．以上より，MHF は濃度分布や蓄積量の評価が重要となる汚染物質の流出問題などにおいて，非常に有効な手段であると考えられる．

参考文献

- 1) 小松駿也：混合ハイブリッド FEM を用いた熱伝導非定常問題における領域内熱量評価，北海道大学寒冷地建設工学講座平成 25 年度修士論文
- 2) P.A.Raviart, J.M.Thomas.: A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606, Springer-Verlag, 1977