

竹の節と組織構造に学ぶ円筒構造の最適な曲げ抵抗メカニズムに関する 基礎的検討

Optimal mechanisms of bending resistance for cylindrical structures learning from bamboo structures

北海道大学工学部
北海道大学大学院工学院
山梨大生命環境学部
北海道大学大学院工学研究院

○ 学生員 佐藤諭佳 (Yuka Sato)
学生員 丸山俊樹 (Toshiki Maruyama)
非会員 島弘幸 (Hiroyuki Shima)
正 員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

竹は高い強度と柔軟性を併せ持つ特異な植物であり、古くからそのしなやかさと強さを活かして構造物や日用品など多くの用途で使われてきた。特に自重を必要以上に増すことなく外力に対して効率よく抵抗するために、中空円筒として成長していく点が樹木とは異なる大きな特徴である。しかし中空円筒は一般に曲げに対して断面がつぶれやすいという欠点も有する。これに効率よく抵抗するために竹が持つ特異な特徴として「節」と「組織構造」が挙げられる。

本研究は、竹の適者生存の進化の過程で獲得した特徴的な節と組織構造に着目し、これらが竹の曲げ抵抗性にどのような影響を与えるかを構造力学的観点から検証し、そこから最適な力学形状を知ることを目的とする。具体的には実際の竹の節間長、壁の厚さ、半径のデータを収集するとともに、節を有する竹の曲げ変形に対し断面偏平抑制効果を表す指数の値¹⁾を計算し、その曲げ特性について検証する。

さらに、竹の断面の組織構造は、竹の表皮側では維管束鞘の密度が高く、内側では低く分布していることが知られている²⁾。この維管束鞘の分布密度の差も竹の曲げ抵抗性の要素であると考え、竹の断面の弾性係数の変化が楕円化率に与える影響と曲率との関係を調べた。

2. 曲げと節の関係

2.1 節間隔の変化

今回の研究を行うにあたり、まず平成26年9月に長野県中野市の竹林にて竹のデータ収集を行った。

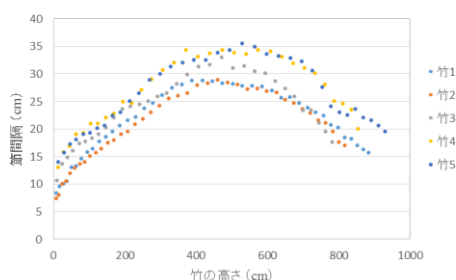


図-1 高さ x と節関係 s の関係

図-1 は竹の節間隔について、根本から先端にかけて

の変化を示した実測値である。このグラフから、根本では節間隔は短く、中間にかけて節間隔は長くなり、先端付近で再び間隔が短くなるという特徴が得られた。これは、根元付近では自重に対する抵抗性を高め、中間付近では自重を増さずにある程度の柔軟性を保持し、先端付近では節から生える葉をできるだけ増やし且つそれらを支えるためであると推察される。

2.2 曲げモーメントと竹の関係

構造力学的には、竹は根元を固定された片持ち梁とみなすことができる。このことから竹にかかる曲げモーメントは根元で大きく、先端にかけて小さくなるといえる。直感的には2.1で示した節間隔が小さいほど、曲げに対する抵抗性が強いと考えられるが、節間隔の実測値はその傾向を完全に示しているものではなかった。そこで Calladine により導出されている両端固定円筒殻の断面偏平抑制効果を表す以下の無次元定数 Ω の値を計算する³⁾。

$$\Omega = \sqrt{tL^2} / r^3 \quad (1)$$

ここで、 t は壁の厚さ、 L は節間隔、 r は外周半径をそれぞれ表す。

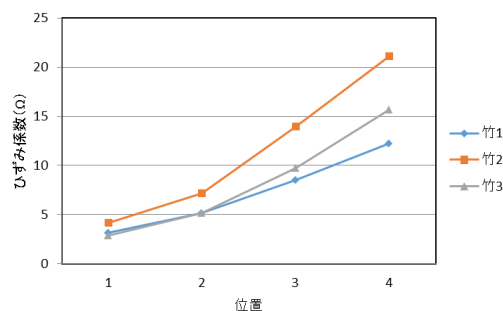


図-2 ひずみ係数(Ω)の変化

図-2 は根本から先端にかけての Ω の値を示したものである。これグラフから、 Ω の値は根元から先端にかけて単調に増大していくことがわかる。したがって、竹は外力により生じる曲げモーメントに対して、自重をいわずに増さないように、節間隔のみならず、壁厚、半径をも最適に制御していると考えられる。

3. 維管束と楕円化の関係

3.1 竹断面における弾性係数の変化

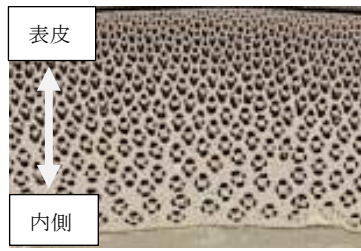


図-3 竹の断面図

図-3 は竹断面の維管束鞘の分布を表している。この図から分かるように、竹断面の表皮側では維管束鞘が密であるが、竹管の中心にかけて疎になっていく。この密度の変化を考慮するため、竹断面の厚さを h 、竹の壁の中立面を基準とし半径方向外向きを正とする座標を t とすると弾性係数 E_f は t の関数となり、次式で表される²⁾。

$$E_f(t) = 13 + \frac{13}{h}t \quad \left(-\frac{h}{2} \leq t \leq \frac{h}{2}\right) \quad (2)$$

3.2 ひずみエネルギーと楕円化率の関係

式(2)を用いて純曲げを受ける竹の曲率と断面の楕円化率を計算する。まずこの場合の全ひずみエネルギーは円周方向の変形と軸方向の変形それぞれに加わるひずみエネルギーの和で表される。

$$U = U_\theta + U_z \quad (3)$$

ここで U_θ は円周方向の、 U_z は軸方向のひずみエネルギーを表し、それぞれ次式となる。

$$U_\theta = \frac{a}{2} \iiint E_f(t) (\varepsilon_\theta^2 + 2a\kappa\varepsilon_\theta + a^2\kappa^2) dz dt d\theta \quad (4)$$

$$U_z = \frac{a}{2} \iiint E_f(t) \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) a \right\}^2 dz dt d\theta \quad (5)$$

上式において

$$\varepsilon_\theta = \frac{v+w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v-w}{a} \right)^2 \quad (6)$$

$$\kappa = \frac{\beta'}{a} = \frac{v-w'}{a^2} \quad (7)$$

であり、 a は半径を表す。また u, v, w はそれぞれ軸方向、円周方向、半径方向の変位を表す⁴⁾。ここで、楕円化率 ξ を用いて各変位を、

$$w_0 = a\xi \cos 2\theta \quad (8)$$

$$v_0 = -\frac{1}{2} a\xi \sin 2\theta \quad (9)$$

$$u_0 = C \left(z - \frac{L}{2} \right) [a \sin \theta + w \sin \theta + v \cos \theta] \quad (10)$$

と仮定する。ここで C は曲率を表す。これらの式をエネルギーの式(3)に代入し、楕円化率で微分して、

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

という停留条件より ξ を求める。

図-4 は、実際に竹を計測して得られたデータのうち、半径 $a=2.6\text{cm}$ 、厚さ $t=0.394\text{cm}$ 、の値を代入して得られた曲率 C と楕円化率 ξ の関係を示したものである。ここで $E=\text{const.}$ は式(2)において $t=0$ 点での弾性係数を壁厚方向で一定とした場合の結果である。

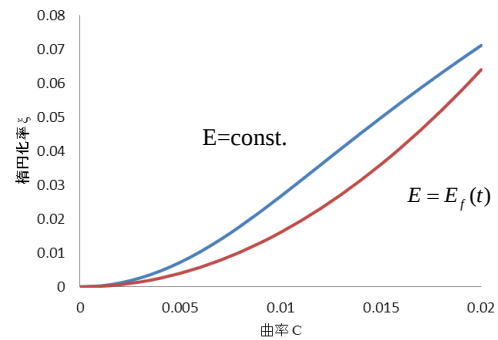


図-4 楕円化率と曲率の関係

この図から、弾性係数が一定の場合よりも、壁厚方向に変化する場合の方が、同じ曲率でも楕円化率が小さいことがわかる。これは、弾性係数が断面の厚さで変化する場合の方が、より曲げに強く、断面が楕円化しにくい構造であることを示している。弾性係数の変化は剛性の傾斜機能性を有した構造であることに対応し、外側の剛性を内側の剛性に対して相対的に高めることで曲げ抵抗性を増すという性質を、竹自身がうまく利用しているといえる。以上から、竹は節間隔を最適に配置するとともに、その断面を維管束鞘の密度を変化させて、より曲げに対する強い抵抗性を持つ構造をとっていることがわかる。

4. まとめ

本研究から得られた知見は以下のとおりである。

- 竹の節間隔は、根本、先端付近では短く、中間付近では長いことが実測により明らかとなった。しかし、曲げ抵抗性を示す無次元パラメータについては、根元から先端にかけて単調に増大していた。このことから、根本付近では大きな曲げモーメントと自重の双方に耐えるために節が多く、中間付近では節を減らしてある程度の柔軟性を保ち、先端では再び節を多くして葉の重さを支えていると考えられる。
- 弾性係数が一定の場合よりも、厚さごとに弾性係数が変化する場合のほうが、同じ曲率での楕円化が抑制される。したがって、竹は内部で維管束鞘の分布密度を変えて弾性係数を変化させることにより、曲げ抵抗性の高い構造形態を得ているといえる。
- 竹は節間隔と維管束鞘の分布密度という2つの要素を巧みに変化させることで、自身の細くて軽い中空円筒の構造を変形から守っていることが、曲げ特性の観点から明らかとなった。

5. 参考文献

- Calladine, C.,: Theory of Shell Structures, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983
- 有尾一郎, 森田千尋, 陶山裕之, 佐藤英一, 藤井堅: 竹の異方性組織構造に観る複合積層モデルに関する力学的考察, 日本機械学会論文集 (A 編) 69 巻 677 号 No.02-0183, 2003-1
- ビルタ・クレスリング, 川崎敏和: 訳: 折った筒と亀甲竹, 折り紙の数理と科学, 森北出版, p192-201, 2005
- Bruth, D.O. and Almroth, B.O.: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975