むだ時間の概念を導入した流出解析手法に関する研究

Study of runoff analysis method introducing the concept of dead time into the lumping model

北海学園大学工学部　○学生員　中村保仁　（Yorihito Nakamura）
北海学園大学工学部　阿部恭平　（Kyouhei Abe）
（独法）寒地土木研究所　ﾌｪﾛｰ　柳屋圭吾　（Keigo Yanagiya）
北海学園大学工学部　正　員　嵯峨　浩　（Hiroshi Saga）

1. まえがき

降雨－流出系における「遅れ時間」は、流出解析において重要な概念であり、これまで数多くの研究成果が発表されてきた。もっとも基礎的な遅れ時間は、洪水到達時間であり、ハイエト・ハイドログラフでは peak to peak や重心の相違時間などで表されてきた。流出モデルでは、直列タンクモデルの場合はタンク段数で表現され、貯留関数法では貯留係数が入力の主要な遅れに相当している。しかし、自動制御などの入力ー出力系ではこの遅れ時間のほかに、「むだ時間とは入力があっても出力が全くない時間」と厳密に定義され、むだ時間が出力の算出に重要な概念として取り扱われている。

降雨－流出系にむだ時間を導入した研究は、嵯峨[1)]が行った程度であり、著者の知る限り､他の研究ではほとんど見当たらない。しかも、この研究ではむだ時間を周波数領域で展開していたため、流出解析手法に応用された例はない。本研究はこの点を踏まえ、集中定数型流出モデルである線形の貯留関数法を対象に、時間領域でむだ時間を最適化する手法を提案し、その導入効果を検証するものである。

2. むだ時間の概念と特性

むだ時間は上述のように入力があっても出力が全くない時間と定義されるが、降雨－流出系では出力が全く存在しないことはほとんどあり得ない現象である。これは水位観測点においても降雨があるため、遅れが発生しないうちに雨水が観測点に到着してしまうからである。このようなことが降雨流出現象にむだ時間が導入されなかった大きな原因であると思われる。降雨流出現象におけるむだ時間の概念は以下のように考えることができる。

流出解析をする際に集中定数型モデルを採用した場合、流域内の複数の雨量計で観測された降雨から流域平均雨量を算出する必要が生じる。この場合には場所の概念は一切含まれていない。現在多用されているティーセン法では、ティーセン多角形の面積で重み付けを行って、平均雨量を算出するのであるから、多角形の重心など代表する地点も概念的には考慮する必要がある。すなわち、「この地点で流域を代表する降雨がありました」という考え方である。むだ時間の降雨－流出系における概念としては、雨水がこの降雨代表地点から水位観測所到達までに要する時間であると考えられる。なお、分布定数型流出モデルでは、河道流出時間や降雨分布を考慮できているので、むだ時間の概念が存在しないことは当然のことである。

むだ時間の特性としては、嵯峨[1)]が既に明らかにしているのでその結果を（1）式に示す。

$$L=(n+1)\frac{\int_0^L q(t)dt}{\left[\frac{1}{k}\int_0^L r(t)dt\right]^{\frac{1}{p}}} \quad \cdot\cdot\ (1)$$

ここで、L：むだ時間、k、p：斜面流定数、n：ハイドログラフ立ち上がり部分を近似した放物線の次数

すなわち、$t=L$ までの累加流量を一定とした場合、ハイドログラフの立ち上がりが急なほど L が小さくなり、降雨開始時に強度の強い雨が降ると L が小さくなることを示している。

3. 流出モデルとむだ時間の導入方法

むだ時間を組み込む流出モデルとして、S～Q 曲線が線形かつ一価関数の貯留関数法を用いた。このモデルはもっとも簡便で単位図法と同等である。連続の式と貯留方程式を（2）式に示す。

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dT}=r(t)-q(t) \\ S=kq \end{cases} \quad \cdot\cdot\ (2)$$

ここに、S：貯留高（*mm*）、k：貯留係数、$r(t)$：有効降雨（*mm/hr*）、$q(t)$：直接流出高（*mm/hr*）

このモデルを採用した理由は、もっともシンプルでむだ時間の効果を評価しやすいこととむだ時間を無理なく導入できることである。

貯留関数法は連続の式と貯留方程式を組み合わせた微分方程式を数値積分して解くことになるから、解くべき方程式は（3）式となる。

$$k\frac{dq}{dt}+q(t)=r(t) \quad \cdot\cdot\ (3)$$

むだ時間を考慮する方法は以下のように行う。

本来、入力があると直ちに出力が発生するのがむだ時間の無いシステムである。むだ時間を L とすると、むだ時間がある場合は、出力が L 時間だけ遅れて出現することになる。したがって、（3）式の $q(t)$を $q(t+L)$と置き換えることによって容易にむだ時間を導入することができる。すなわち、（4）式を解けばよいことになる。

$$k\frac{dq(t+L)}{dt}+q(t+L)=r(t) \quad \cdot\cdot\ (4)$$

さらに、$q(t+L)$を Taylor 級数展開すると、

$$q(t+L)=q(t)+L\frac{dq(t)}{dt}+\frac{L^2}{2!}\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\cdots \quad \cdot\cdot\ (5)$$

（5）式を（4）式に代入することで解を得ることは可能である。また、（5）式の右辺第何項まで採用するかという問題は残るが、本研究ではむだ時間を考慮しないモデルをモデル①、右辺第 2 項まで採用したモデルをモデル②、右辺第 3 項までの場合をモデル③、4 項までをモデル④と呼ぶことにし、（5）式の採用項数の違いによる計算精度の比較も行う。それぞれの貯留関数の方程式を以下に列挙する

$$kL\frac{d^2q}{dt^2}+(k+L)\frac{dq}{dt}+q=r \quad \cdot\cdot\ (6)$$

$$\frac{kL^2}{2}\frac{d^3q}{dt^3}+(kL+\frac{L^2}{2})\frac{d^2q}{dt^2}+(k+L)\frac{dq}{dt}+q=r \quad (7)$$

$$\frac{kL^3}{6}\frac{d^4q}{dt^4}+(\frac{kL^2}{2}+\frac{L^3}{6})\frac{d^3q}{dt^3}+(kL+\frac{L^2}{2})\frac{d^2q}{dt^2}+(k+L)\frac{dq}{dt}+q=r \quad \cdot\ (8)$$

すなわち、モデル①が（3）式、モデル②が（6）式、モデル③が（7）式、モデル④が（8）式である。（5）式の右辺をどの項まで採用したとしても、（6）～（8）式の未知パラメーターは k と L だけであり、最適化を行う場合、計算上非常に有利になる。また、出力の主要な部分の遅れを k で、むだ時間を L で表すことになり、入力ー出力系の遅れ要素を全て取り込んだことになる。

4.　未知パラメーターの数学的最適化手法と評価基準

本研究では、未知パラメーターを数学的に最適化する方法として、感度係数を用いたニュートン法を採用した。目的関数は(9)式で定義される。

$$MinJ=\sum e_j^{\,2} \quad , \quad {\scriptstyle j=1,2,3,\cdots,N} \quad \cdot\cdot\ (9)$$

ここで、
$$e_j=\frac{q_j^{\,*}-q_j}{\sqrt{q_j^{\,*}}}$$

q_j*：観測流出高、q_j：計算流出高、N：流量標本数

ニュートン法における（m+1）ステップ時の未知パラメーターは次式で算出される。m は計算過程におけるステップ数を示し、$\Delta\mathbf{P}^m$ は補正値を示す。

$$\mathbf{P}^{m+1}=\mathbf{P}^m+\Delta\mathbf{P}^m \quad \cdot\cdot\ (10)$$

ここで、$\mathbf{P}^m=\begin{bmatrix}k^m\\ L^m\end{bmatrix}$ ，$\Delta\mathbf{P}^m=\begin{bmatrix}\Delta k^m\\ \Delta L^m\end{bmatrix}$

補正値 $\Delta\mathbf{P}^m$ は、（11）式によって算出され、効率よく算定できる成分回帰手法を併用した。T は転置を意味する。

$$\Delta\mathbf{P}^m=\left[X^TX\right]^{-1}\left[X^TE\right] \quad \cdot\cdot\ (11)$$

ここで、$E=\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ \vdots\\ E_N\end{bmatrix}$ ，$X=\begin{bmatrix}x_{1,1} & x_{1,2}\\ x_{2,1} & x_{2,2}\\ \vdots & \vdots\\ x_{N,1} & x_{N,2}\end{bmatrix}$

ただし、$x_{j,1}=\frac{1}{\sqrt{q_j^{\,*}}}\cdot\frac{\partial q}{\partial k}$ ，$x_{j,2}=\frac{1}{\sqrt{q_j^{\,*}}}\cdot\frac{\partial q}{\partial L}$

（10）式を繰り返し計算し、（12）式で示される条件を満たしたならば収束とする。ε は 1%とした。

$$\varepsilon\geq\left|\frac{\Delta\mathbf{P}^m}{\mathbf{P}^m}\right| \quad \cdot\cdot\ (12)$$

感度係数は未知パラメーターの変化に対する流出高の変化を表し、効率よく補正値 $\Delta\mathbf{P}^m$ を求めるために導入される。

感度係数 **U** は次式によって算出される。

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{AU}+\mathbf{D} \quad \cdot\cdot\ (13)$$

ここで、モデル②の場合は

$$\mathbf{U}=\left[\ \frac{\partial y_1}{\partial k}\ \frac{\partial y_1}{\partial L}\ \frac{\partial y_2}{\partial k}\ \frac{\partial y_2}{\partial L}\ \right] \quad \cdot\cdot\ (14)$$

$$y_1=q \quad , \quad y_2=\frac{dq}{dt}$$

A：係数マトリックス、**D**：係数ベクトル

感度係数の式はモデルによってそれぞれ異なるため、ここで詳細を記述することを省くが、誘導過程は全て同じである。なお、参考文献 2）、3）に詳述されているので参照されたい。

解析精度の評価基準は（15）式で示される *Nash-Sutcliffe* 係数（*NS* 値）と（16）式の相対誤差（*S* 値）を用いた。

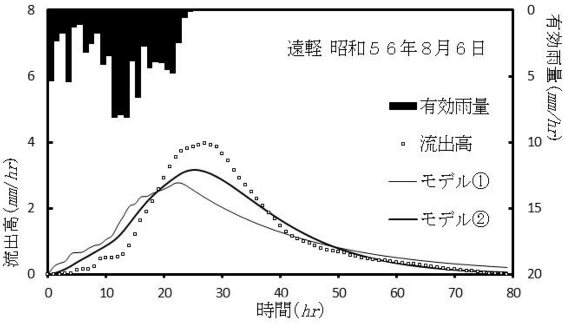
$$NS=1-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left\{q^*(i)-q_{cal}(i)\right\}^2}{\sum_{i=1}^{N}\left\{q^*(i)-q_{av}\right\}^2} \quad \cdot\cdot\cdot\ (15)$$

$$S=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\left\{q^*(i)-q_{cal}(i)\right\}^2/N}}{q_{av}} \quad \cdot\cdot\cdot\ (16)$$

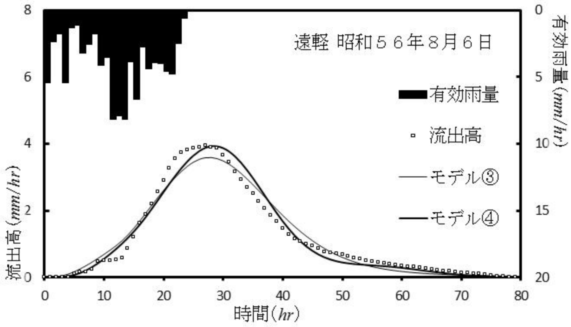
ここで、$q^*(i)$：i 時の観測流出高、$q_{cal}(i)$：i 時の計算流出高、q_{av}：観測流出高の平均値、N：流量標本数

NS 値の取り得る値は 1.0 以下で、一般に *NS* 値が 0.8 以上で特に計算精度がよいとされている。

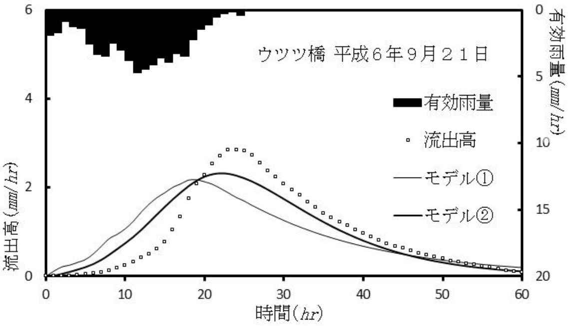
S 値は、値が小さいほど適合度がよいと判断される。



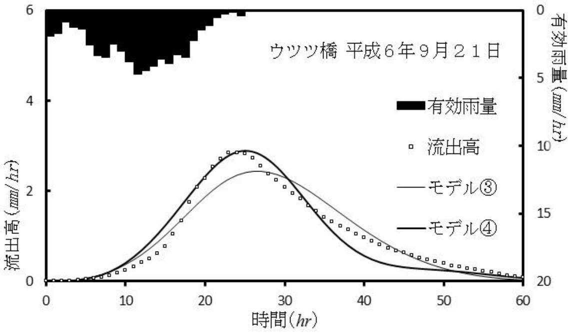
図－1 計算結果



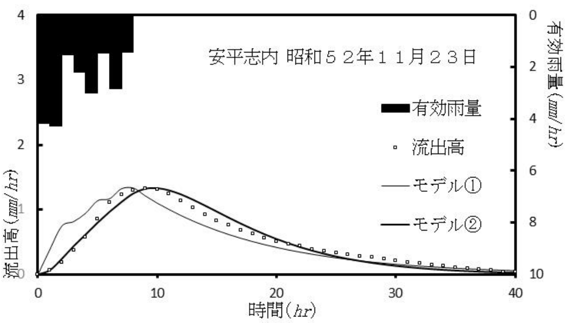
図－2 計算結果



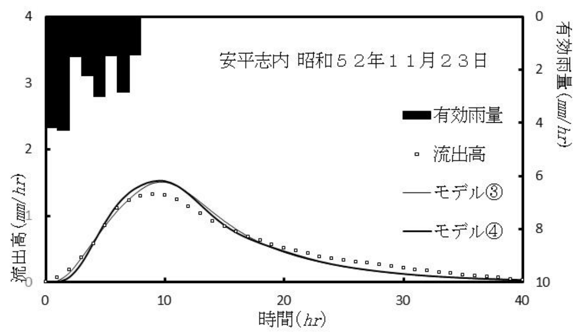
図－3 計算結果



図－4 計算結果



図－5 計算結果



図－6 計算結果

5.　観測値による検証

むだ時間の導入が正しいかどうかの検証を観測値を用いて行った。計算に用いた出水例は、道内一級河川 13 水系で観測[4] されたもので、計算数は 26 例である。なお、流量の基底流出成分の分離は、ハイドログラフ立ち上がり点と減水部第二折曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。

計算過程において主観的な判断は成分分離に入っているが、解析は同じデータを使用し、初期値や（12）式の収束条件を全て統一しているので、計算結果に主観的な判断が入ることはない。

計算結果を図－1～図－6 に示す。図－1～図－2 は湧別川水系の遠軽基準点における昭和 56 年 8 月 6 日出水の計算結果であるが、モデルを二つのグループに分けて示している。なお、この流域の面積は 958km^2、総降雨量は 190*mm* の大規模な出水である。

図－3 と図－4 は渚骨川水系で基準点はウツツ橋、流域面積 1198 km^2、平成 6 年 9 月 21 日出水の総降雨量 103*mm* の中規模出水である。図－5 と図－6 は天塩川水系、基準点は安平志内、昭和 52 年 11 月 23 日の総降雨量 29*mm* の比較的小さな規模の場合である。

出水規模に関わらず、モデル③、モデル④の適合度がよい結果となったが、それ以上に注目すべきは、ピーク流量の時間的なずれが改善されている点である。未知パラメーターは二個であるが、このようにむだ時間を導入することで計算結果が大きく改善されていることがわかる。

全体の適合度を示す *NS* 値と *S* 値を表－1 と表－2 に示す。表中、着色されている欄はもっとも適合度がよいものである。*NS* 値では、モデル②とモデル③が着色数の多いモデルであり、13 水系全体ではモデル③がもっとも *NS* 値の高いモデルとなっている。*S* 値でも全く同じ傾向で、二つの評価基準で判断してもモデル③が最良であることが分かる。これは、（5）式の右辺の項数を数多くとれば解析精度がよくなるという単純なものではなく、右辺の項数が多くなれば（6）～（8）式に示されるような貯留関数における係数がより複雑な形となるためとハイドログラフ自体が三次の微分項、すなわち、三次程度の傾きで形成される波形であることがその主な理

表－1　全水系における各モデルの平均 NS 値

水系	モデル①	モデル②	モデル③	モデル④
釧路川水系	0.658	0.906	0.963	0.964
尻別川水系	0.907	0.973	0.922	0.934
湧別川水系	0.729	0.953	0.963	0.954
沙流川水系	0.511	0.896	0.858	0.822
常呂川水系	0.727	0.932	0.910	0.894
鵡川水系	0.545	0.797	0.941	0.855
後志利別川水系	0.528	0.735	0.881	0.815
渚滑川水系	0.627	0.896	0.879	0.898
十勝川水系	0.671	0.828	0.953	0.882
留萌川水系	0.785	0.972	0.976	0.961
網走川水系	0.747	0.972	0.926	0.893
石狩川水系	0.467	0.707	0.890	0.905
天塩川水系	0.716	0.947	0.927	0.917
13 水系全体の平均 *NS* 値	0.663	0.886	0.922	0.900

表－2　全水系における各モデルの平均 S 値（%）

水系	モデル①	モデル②	モデル③	モデル④
釧路川水系	55.5	29.8	18.8	18.0
尻別川水系	30.2	15.7	28.2	25.2
湧別川水系	51.0	20.6	18.7	20.3
沙流川水系	56.1	25.9	28.1	31.3
常呂川水系	48.5	24.8	28.1	29.6
鵡川水系	64.4	37.4	23.7	34.4
後志利別川水系	60.8	47.2	32.4	39.7
渚滑川水系	52.6	27.8	27.8	25.9
十勝川水系	51.7	39.6	22.7	31.7
留萌川水系	44.7	15.9	14.8	18.5
網走川水系	42.3	14.2	21.7	26.4
石狩川水系	50.8	35.9	25.1	23.0
天塩川水系	45.0	19.2	22.9	24.4
13 水系全体の平均 *S* 値	50.3	27.2	24.1	26.8

由であると思われる。

以上のような結果を勘案すると、むだ時間を本手法で導入する場合、右辺第 3 項まで採用することが最適であると考えられる。

6.　最後に

本研究では、むだ時間という新しい概念を降雨－流出系に適用し、導入方法、未知パラメーターの時間領域での最適化手法、実流域での適応性の検証を行った。検証では、適合度の評価基準を *Nash-Sutcliffe* 係数と相対誤差の二つとし、道内一級河川 13 水系の観測データを用いて解析した。その結果、解析精度を向上させることができることや、*Taylor* 級数展開で第何項まで採用することが一番適切なのかも明らかにした。しかし、ここで、導入したモデルは、全て有効降雨と直接流出高のデータを用いねばならず、その背景には流出率という水文学の永遠の課題が含まれている。近年、損失孔を含む貯留関数法が幾つか発表されてきたが、これらは流出率を排除する発想から生まれ出たものである。今後、この研究を発展させるためには、このような貯留関数法や観測値をそのまま使用する流出解析モデルへの適用が不可欠であると考えている。

参考文献

1）嵯峨浩：周波数応答法による流出解析、土木学会論文集、No.393/Ⅱ-9、pp.77-86、1988-5.
2）北海道開発局開発土木研究所、若手水文学研究会：現場のための水文学、1994.
3）嵯峨浩：流出解析モデルと計算手法：第 40 回水工学に関する夏期研修会講義集、pp.A-1-1－A-1-20、2004.
4）嵯峨浩：道内一級河川 13 水系の洪水データ集、北海学園大学、2001.