B－37　　平成25年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第70号

乱流-氷界面に発達する界面波

THE FORMATION OF BOUNDARYWAVES ON THE ICE SURFACE
CREATED BY A TURBULENT FLOW

北海道大学大学院工学院　学生会員　○内藤健介 (Kensuke NAITO)
北海道大学大学院工学研究科　正会員　泉典洋 (Norihiro IZUMI)
大阪工業大学情報科学部　正会員　横川美和 (Miwa YOKOKAWA)
北海道大学大学院工学研究科　正会員　山田朋人 (Tomohito.J.YAMADA)

1　はじめに

北海道をはじめとする寒冷地では冬期に河川が結氷する現象がしばしば見られる．この現象は冬期間の安定的な取水に支障をきたす可能性があるのみならず，アイスジャムによる河川の水位上昇や津波発生時の災害ポテンシャル増加等，治水および利水上重要な問題を引き起こす．しかしながら河川の結氷現象の発生機構など詳細には明らかにされていない点が数多く残されている．また，結氷河川の氷の裏側にリップル形状[1]（**図 1**）が発達していることがこれまでに観測されている．関ら[2]は結氷河川等を想定し，管路内の河床底面形状の安定解析を行ったが，結氷河川の流路粗度を正確に見積もるためには水面に張った氷と流れの界面に発達する形状についても考慮すべきであろう．以上からも流れ－氷界面にの相互作用およびその結果発達する発達する地形についての機構を明らかにすることは工学的に重要である．

筆者ら[3)4)]はこれまでに層流条件下において流体・周囲気体・氷床の温度分布が界面の不安定性を左右することを明らかにし，また界面波が伝播する方向もこの温度分布に左右されることを明らかにした．本研究では，これまで層流を想定していた筆者らの理論をより実現象に近い乱流に適用することを試みる．流れの方程式と熱輸送方程式，流れ-氷界面の熱フラックスのバランスの方程式を用いて線形安定解析を行い，乱流下での氷界面の安定性を理論的に明らかにする．

2　定式化

図 2 に示すような状況を考える．無限大の厚さを持つ氷の上を乱流が流れている．流れている流体の層厚は H であり，水面の温度は周囲気体の温度 T_a に一致しているとする．流れの底面では流体の温度は T_m に一致しており，この温度は氷の融点（水の凝固点）に一致している．T_a が十分低温であり水の凝固点を下回っている場合，水は氷の上で凝固し，氷の表面高さを増加させる．一様勾配 S の斜面から測った氷の表面高さを η とする．筆者らの先行研究より，氷からのマイナスの熱フラックスは常に界面を安定化させる方向に働くため，ここでは簡単のため，氷からの熱フラックスを考慮しない．

図 1　結氷河川の氷の裏面に見られるリップル形状

2.1　流れの方程式

氷上の流れを次のレイノルズ平均を取った Navier-Stokes 方程式および連続の式で表す．なおここでは流れの時間変化は氷の形状の時間変化と比較して圧倒的に速いとし，準定常の仮定を用いて流れの非定常項を無視している．

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{1}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+S^{-1}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

ここで x および z はそれぞれ流下方向および水深方向の座標，u および w は流速の x および z 方向成分，p は圧力，$\tau_{i,j}(i,j=x,y)$ はレイノルズ応力である．

レイノルズ応力は混合距離モデルを用いて次のように表す．

$$\tau_{xx}=2(Re^{-1}+\nu_T)\frac{\partial u}{\partial x},\quad \tau_{zz}=2(Re^{-1}+\nu_T)\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4a, b}$$

$$\tau_{xz}=(Re^{-1}+\nu_T)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{4c}$$

$$\nu_T=\kappa^2 z^2\left(1-e^{-Rez/26}\right)^2(1-z)\left|\frac{du}{dz}\right| \tag{4 d}$$

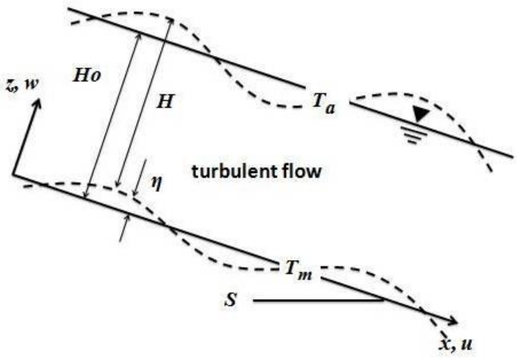


図２　流れと座標系の概念図

ここで Re はレイノルズ数であり，その逆数は無次元化された動粘性係数を表す．ν_T は渦動粘性係数である．また，上式では次ような無次元化および座標変換が既に行われている．

$$(x, z, H, \eta) = (x^*, z^*, H^*, \eta^*)/H_0^* \tag{5a}$$
$$(u, w) = (u^*, w^*)/U_{f0}^* \tag{5b}$$
$$(P, \tau_{i,j}) = (P^*, \tau_{i,j}^*)/\left(\rho U_{f0}^{*2}\right) \tag{5c}$$
$$\nu_T = \nu_T^*/\left(U_{f0}^* H_0^*\right) \tag{5d}$$
$$z' = \frac{z-\eta}{H} \tag{5e}$$

上式中の U_{f0}^* および H_0^* はそれぞれ平坦床等流基準状態における底面摩擦速度および水深である．

本論文中では * のついた変数は次元量を表し，* のついてない変数を無次元量として表している．また，$_0$ のついた変数は平坦床等流基本状態における変数を表し，以降 z' は簡単のため z を用いて表す．

2.2　熱輸送の定式化

流れの方程式と同様，準定常の過程を用いて流体内部の熱輸送を次の熱伝導方程式で表す．

$$u\frac{\partial T_f}{\partial x} + w\frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{\partial F_{fx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{fz}}{\partial z} \tag{6}$$

ここで T_f は流体温度，F_{fx} および F_{fz} は合成熱フラックスであり，それぞれ次式で定義される．

$$F_{fx} = (Pr^{-1}Re^{-1} + \alpha_T)\frac{\partial T_f}{\partial x}, \tag{7a}$$
$$F_{fx} = (Pr^{-1}Re^{-1} + \alpha_T)\frac{\partial T_f}{\partial z} \tag{7b}$$

α_T は渦温度拡散係数であり，乱流プラントル数 Pr_T を用いて次のように表される．なお，通常乱流プラントル数は 1 として扱われるため、ここでも 1 として扱う．

$$\alpha_T = \frac{\nu_T}{Pr_T} \tag{8}$$

ここでも次の無次元化が行われている．

$$T_f = \frac{T_f^* - T_m^*}{T_a^* - T_m^*}, \tag{9}$$

T_m^* は流体-氷界面における温度である．

また，ここで熱フラックスを定義しておく．

$$\boldsymbol{F_f} = (F_{fx}, F_{fz}) \tag{10}$$

2.3　氷の形状の時間変化

氷は一様速度 β で成長しているとする．流れ-氷界面において，界面の上から垂直に出ていく熱フラックスは $\boldsymbol{F_f}(\eta)\cdot\mathbf{e_{nb}}$ と表され，これを用い界面の形状の時間変化を次の式で表す．

$$-\frac{\partial(\beta t + \eta)}{\partial t} = \boldsymbol{F_f}(\eta)\cdot\mathbf{e_{nb}} \tag{11}$$

上式中の時間 t は次のように無次元化される．

$$t = \frac{k_f(T_a^* - T_m^*)}{\rho_f h_f H_0^{*2}} t^* \tag{12}$$

k_f，ρ_f および h_f はそれぞれ流体の熱伝導率，密度および凝固熱である．

3　境界条件

流れの境界条件として，水面（$z = H$）において法線方向流速がゼロとなる運動学的境界条件と，接線方向および法線方向応力がゼロとなる力学的境界条件を，流れ底面（氷面，$z = \eta$）において接線方向および法線方向流速がゼロとなる条件を用いる．このとき境界条件はそれぞれ次式で表される．

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{e_{ns}} &=& 0 \\ \mathbf{e_{ts}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e_{ns}} &=& 0 \\ \mathbf{e_{ns}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e_{ns}} &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{at} \quad z = H \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{e_{nb}} &=& 0 \\ \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{e_{tb}} &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{at} \quad z = \eta \tag{14}$$

ここで$\boldsymbol{u}$は流速ベクトルである．また$\mathbf{T}$は応力テンソルであり，次のように定義される．

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$\mathbf{e_{ns}}$および$\mathbf{e_{ts}}$は水面に対する法線方向および接線方向の単位ベクトル，$\mathbf{e_{nb}}$および$\mathbf{e_{tb}}$は氷面に対する法線方向および接線方向の単位ベクトルであり，それぞれ次式で表される．

$$\mathbf{e_{ns}} = \frac{(-\partial H/\partial x, 1)}{\left[(\partial H/\partial x)^2 + 1\right]^{1/2}}, \quad \mathbf{e_{ts}} = \frac{(1, \partial H/\partial x)}{\left[(\partial H/\partial x)^2 + 1\right]^{1/2}} \tag{16a, b}$$

$$\mathbf{e_{nb}} = \frac{(-\partial \eta/\partial x, 1)}{\left[(\partial \eta/\partial x)^2 + 1\right]^{1/2}}, \quad \mathbf{e_{tb}} = \frac{(1, \partial \eta/\partial x)}{\left[(\partial \eta/\partial x)^2 + 1\right]^{1/2}} \tag{16c, d}$$

流れは一定温度 T_a の周囲気体と接しているため，水面での流体の温度も T_a を取るとする．流れ－氷界面上の温度は氷の融点（水の凝固点）T_m に一致している．すなわち温度の境界条件は次のように表される．

$$T_f = T_a \quad \text{at} \quad z = H \tag{17a}$$
$$T_f = T_m \quad \text{at} \quad z = \eta \tag{17b}$$

4　線形安定解析

流れ関数 ψ を導入する．

$$(u, w) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{18}$$

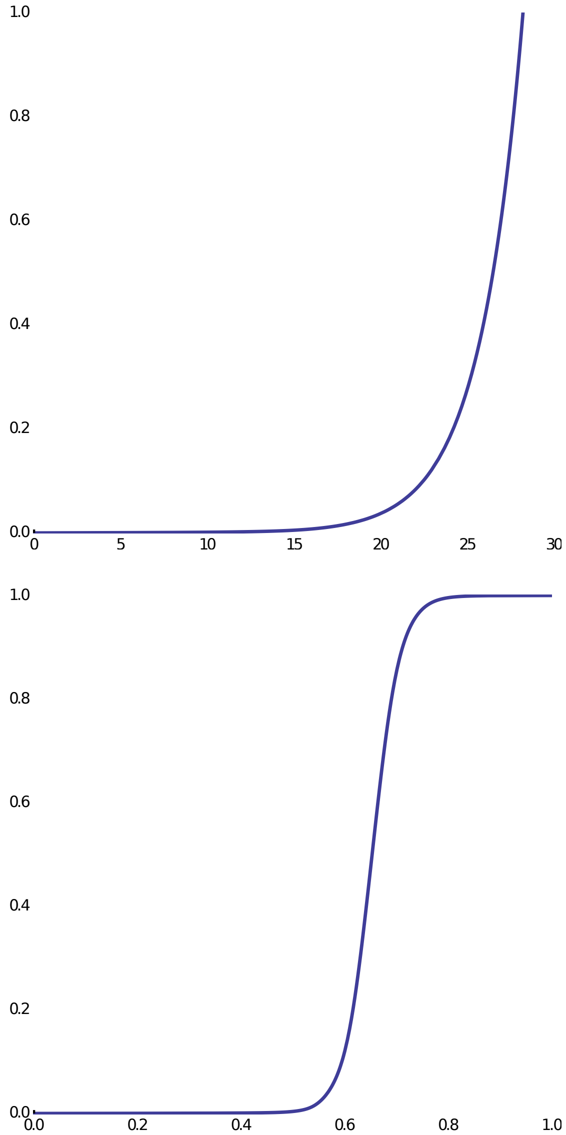


図 3　(a) 流速分布 (b) 温度分布.

さらに各変数に対して次の摂動展開を行う.

$$\psi = \psi_0(z) + A\psi_1(z)e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{19a}$$

$$p = p_0(z) + Ap_1(z)e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{19b}$$

$$T_f = T_{f0}(z) + AT_{f1}(z)e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{19c}$$

$$H = 1 + AH_1e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{19d}$$

$$\eta = A\eta_1e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{19e}$$

A, α および ω はそれぞれ擾乱の振幅，波数および各周波数である.

4.1　等流基本状態

上記の摂動展開を支配方程式および境界条件に代入し, $O(1)$ の項からなる支配方程式を解くことにより等流基本状態における解を得る．得られた流速分布および温度分布を**図 3** に示す.

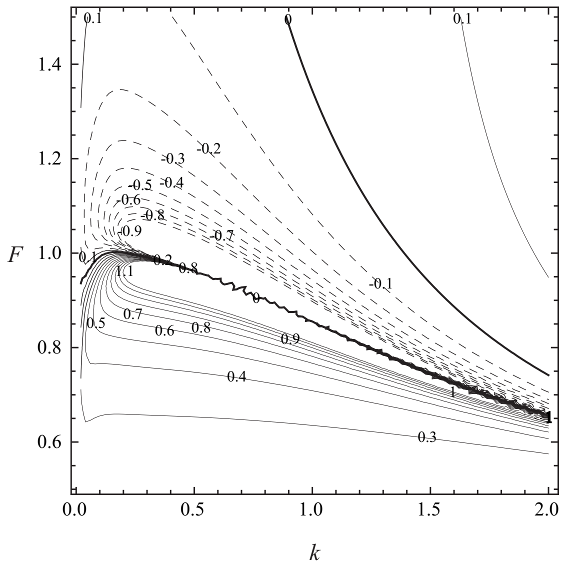


図 4　擾乱の増幅率 $Im[\omega]$ のコンター図．Re=10000,T_a=1,Pr=7

4.2　摂動問題

等流基本状態に対して微小な波状擾乱を与える．摂動展開を行った支配方程式から $O(A)$ の項を取り出す．このとき氷の時間変動は次の式で表される.

$$-i\omega\eta_1 + \frac{1}{Pr}\frac{1}{Re}\left(H_1T'_{f0}(0) - T'_{f1}(0)\right) = 0 \tag{20}$$

ψ_1 および T_{f1} を Chebychev 多項式展開を用いてそれぞれ次のように表す.

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{N} a_nT_n(\zeta) \tag{21a}$$

$$T_{f1} = \sum_{n=0}^{N} b_nT_n(\zeta) \tag{21b}$$

ここで T_n は Cheyshev 多項式，ζ は [-1,1] で定義される Chebyshev 多項式の独立変数である．ここでは計算精度を上げるために次の座標変換を行っている.

$$\zeta = 2\left(\frac{\log(10Re\zeta+1) - \log(10Re(1-\zeta)+1)}{\log(10Re+1)}\right) - 1 \tag{22}$$

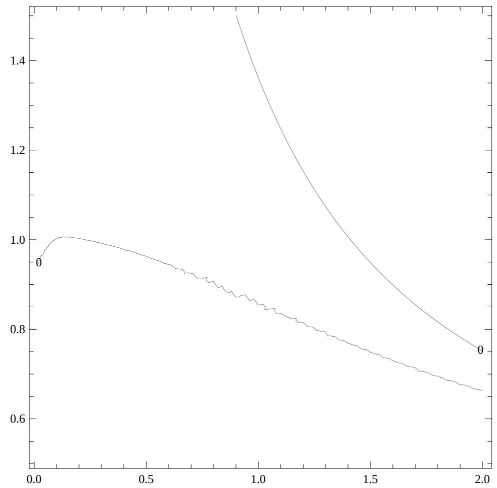
これらを支配方程式に代入した後，次の Gauss-Lobatto 点において式を評価する.

$$\zeta_j = \frac{(10Re+1)^{\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)+1} - 1}{10Re\left((10Re+1)^{\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)} + 1\right)} \tag{23}$$

それを境界条件と合わせて解き，最終的に擾乱の角速度 ω が次の関数系として求められる.

$$\omega = f(\alpha, Fr; Re, Pr, Pr_T) \tag{24}$$

ここで求められた ω の虚部が摂動の増幅率に相当する．ここでは Re,Pr および Pr_T（ここでは常に 1 とする）を指定し，増幅率を α-Fr 平面上に示した（**図 4**)．フルード数の小さな領域および大きい領域に増幅率が正となる不安定領域が



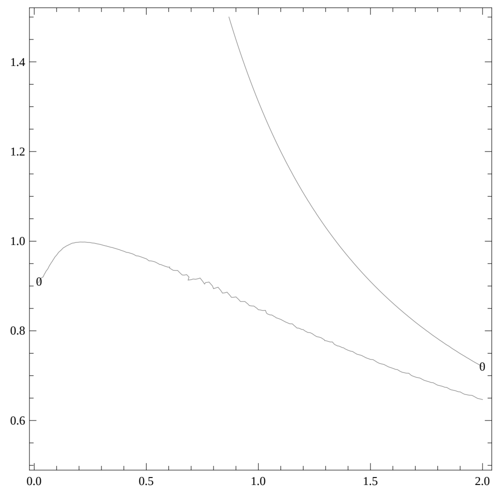


図 5　(a) Re=50000. (b) Re=1000.

現ている．フルード数の小さな不安定領域ではデューンが，フルード数の大きな不安定領域ではアンチデューンが発達することが予想される．

次に安定領域（不安定領域）のレイノルズ数および周囲気体温度の条件に対する依存性を検証する．**図 5** にレイノルズ数 Re を 50000 とした場合と Re を 1000 とした場合のコンター図を示した．波数 α が小さい領域でわずかな違いが見られるが，その他に違いは現れていない．また，周囲気体温度 T_a を 1 した場合と T_a を-1 を比較したところ，両者に違いは現れなかった．以上から安定領域はレイノルズ数 Re や周囲気体の温度条件に大きく左右されないことが明らかとなった．なお，比較を簡単化するため**図 5** では増幅率が 0 となる線（中立線）のみを表示している．

5　結論

本研究から得られた主たる結論は次のとおりである．

- 乱流−氷界面について線形安定解析を行い，波数−フルード数平面上に擾乱の増幅率を示すコンター図を作成した．
- フルード数の大きな領域と小さな領域で不安定領域が現れた．
- 安定領域（不安定領域）はレイノルズ数や周囲気体の温度（水面温度）に依存しない．
- 結氷河川に適用する場合，河床が断熱条件である点や日射によるフラックスおよび氷の厚さの変化等も考慮する必要がある．

参考文献

[1] Carey K. L.: Obsreved configuration and computed roughness of the underside of river ice, St. Crois River Wisconsin, *US Geological Survey Professional Paper*, 1966.

[2] 関陽平，泉典洋: 管路における砂-水界面の安定性，応用力学論文集, 第 11 巻, pp. 753-760，2008.

[3] 泉典洋，横川美和，内藤健介: 流れ-氷界面に発生する境界不安定現象，水工学論文集, 第 57 巻, 2013.

[4] 内藤健介，泉典洋，横川美和: 下流進行する氷上のステップ地形，水工学論文集, 第 57 巻, 2013.