平成25年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第70号

多孔質体内部における Rayleigh-Taylor 不安定現象

Rayleigh-Taylor Instability in Porous Media

北海道大学工学部環境社会工学系　○学生員　青井 智祥 (Tomohiro AOI)
北海道大学大学院工学研究院　正　員　泉 典洋 (Norihiro IZUMI)
名古屋工業大学大学院工学研究科　正　員　前田 健一 (Ken-ichi MAEDA)

1　はじめに

土砂で構成される堤防等の多孔質体において、降雨発生時には多孔質体内部の空気と降雨による浸透水の交換が行われる。この交換により雨水は多孔質体内部に浸透していく。ところが空隙率が低い土壌等の多孔質体においては、このような雨水の浸透が容易に生じない場合がある。

この現象は粒径の小さい砂質系の地盤で起こりやすく、また集中豪雨時のようなある程度大きい降雨強度の時に発生確率が高まると報告されている [1)]。土砂で構成される堤防においては堤体内の空気と浸透水の交換が容易に行われず、浸透水の量が多くなると内部の空気は被圧され、圧力がある限界を超えると局所的に圧力が集中して空気が噴き出す (エアブロー) 箇所が見られるようになる。このエアブローにより堤防表面に大きな空隙を作り、堤防強度の劣化を招く可能性がある。実際に 2000 年 9 月に起きた東海豪雨において、堤防の決壊に空気が関連していたと報告されている [1)](図-1)。また 2012 年 9 月の台風第 15 号では堤防内部から空気が噴き出す現象が確認されている (図-2)。このような現象が発生する基本的なメカニズムについては詳しく判っていないのが現状である。

雨水の浸透が止まっている状態、すなわち空気の上に水が静止している状態は不安定である。このように密度の小さい流体の上に密度の大きい流体が載った状態は、界面に与えられた微小な擾乱に対して不安定であり、この平衡状態が崩れると二つの流体は混ざり合うか、あるいは小さい密度の流体が密度の大きい流体の上に載った安定状態に移行する。このような不安定性は Rayleigh-Taylor 不安定性と呼ばれるものであり、古くから理論研究が行われている。

堤防内部において空気の上に水が載った状態は、水の粘性や表面張力の影響によって保たれる力学的な平衡状態であると考えられる。先行研究において表面張力の影響を考慮しない解析が行われたが、このような平衡状態が保たれる結果は得られなかった [3)]。不安定な状態が比較的安定な状態で維持される力学的安定性に関して表面張力を考慮した線形安定解析の手法を用いて調べる。

2　定式化

2.1　基礎方程式

多孔質体内部での 2 次元流れは、2 次の Navier-Stokes 方程式の体積平均をとって得られる Brinkman 方程式で表される [4),5),6)]。空隙率が比較的小さい多孔質体内部の流れは十分に小さく、ここでは Stokes 近似を用いて移流項の影響を無視する。液相 (水) および気相 (空気) の方程式は次のようになる。

図-1　東海豪雨による新川堤防決壊箇所 [2)]。

図-2　庄内川周辺で見られた堤防内部からの空気の吹き出し (エアブロー)[1)]。

$$\rho_w \frac{\partial \boldsymbol{u_w}}{\partial t} = -\nabla \boldsymbol{p_w} + \mu_w \nabla^2 \boldsymbol{u_w} - \frac{\epsilon \mu_w}{K} \boldsymbol{u_w} - \boldsymbol{f}(0, \rho_w g) \qquad (1)$$

$$\nabla \boldsymbol{u_w} = 0 \qquad (2)$$

$$\rho_a \frac{\partial \boldsymbol{u_a}}{\partial t} = -\nabla \boldsymbol{p_a} + \mu_a \nabla^2 \boldsymbol{u_a} - \frac{\epsilon \mu_a}{K} \boldsymbol{u_a} - \boldsymbol{f}(0, \rho_a g) \qquad (3)$$

$$\nabla \boldsymbol{u_a} = 0 \qquad (4)$$

ここで $\boldsymbol{u_w}, \boldsymbol{u_a}$ は多孔質体内部において体積平均を取った x および z 方向の実質流速ベクトル、$\boldsymbol{p_w}, \boldsymbol{p_a}$ は空隙内の液相および気相の平均的な圧力ベクトル、ϵ は空隙率、μ_w, μ_a は液相および気相の粘性係数である。抗力項に表れる K は透水性係数である。

2.2　無次元化

ほとんどの物理量は次元を持っており、数値解析を行う場合、物理量 (有次元) を数 (無次元) に変換する必要がある。ここで考えている時間スケールを T、長さスケールを L、質量スケールを M とおく。ここでは式 (1) の x 方向に関する式を無次元化することによりそれぞれの代表スケールを求める。導出された式の各項の係数を 1 と置くことによりそれぞれの代表スケールが求まり、次式で表される。

$$T=\frac{K}{\epsilon\nu_w},\quad L=\sqrt{\frac{K}{\epsilon}},\quad M=\frac{\rho_w K^{3/2}}{\epsilon^{3/2}} \tag{5a–c}$$

これらを用いて次のような無次元化を導入する。ここではそれぞれのベクトルを x および z に分解し、大文字表記を行う。

$$t=\frac{K}{\epsilon\nu_w}t^*,\quad (x,z)=\sqrt{\frac{K}{\epsilon}}(x^*,z^*), \tag{6a, b}$$

$$(U_w,W_w,U_a,W_a)=\nu_w\sqrt{\frac{\epsilon}{K}}(U_w^*,W_w^*,U_a^*,W_a^*), \tag{6c}$$

$$(P_w,P_a)=\rho_w\frac{\epsilon\nu_w^2}{K}(P_w^*,P_a^*) \tag{6d}$$

また次式で表される無次元パラメータを扱う。

$$\mathcal{R}=\frac{\rho_a}{\rho_w},\quad \mathcal{M}=\frac{\mu_a}{\mu_w},\quad \mathcal{G}=\frac{\rho_w^2 gK^{3/2}}{\epsilon^{3/2}\mu_w^2}\quad \mathcal{N}=\frac{\nu_a}{\nu_w}=\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}} \tag{7a–d}$$

$\mathcal{R},\mathcal{M},\mathcal{N}$ はそれぞれ気相と液相の密度比、粘性係数比、動粘性係数比を表し、また、$\mathcal{G}$ は重力加速度と透水係数を表す長さスケールの積と水の粘性係数の比を表した無次元パラメータである。無次元化して表した液相の方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial U_w}{\partial t}=-\frac{\partial P_w}{\partial x}+\frac{\partial^2 U_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_w}{\partial z^2}-U_w \tag{8}$$

$$\frac{\partial W_w}{\partial t}=-\frac{\partial P_w}{\partial z}+\frac{\partial^2 W_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_w}{\partial z^2}-W_w-\mathcal{G} \tag{9}$$

$$\frac{\partial U_w}{\partial x}+\frac{\partial W_w}{\partial z}=0 \tag{10}$$

ここで*は表記を簡単にするために省略した。以降も*を省略して表記する。気相での運動方程式は次のようになる。

$$\mathcal{R}\frac{\partial U_a}{\partial t}=-\frac{\partial P_a}{\partial x}+\mathcal{M}\left(\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_a}{\partial z^2}-U_a\right) \tag{11}$$

$$\mathcal{R}\frac{\partial W_a}{\partial t}=-\frac{\partial P_a}{\partial z}+\mathcal{M}\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_a}{\partial z^2}-W_a\right)-\mathcal{R}\mathcal{G} \tag{12}$$

$$\frac{\partial U_a}{\partial x}+\frac{\partial W_a}{\partial z}=0 \tag{13}$$

今、液相および気相の方程式に発散 ∇ をとることで次のように表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{u_w}=-\nabla^2\boldsymbol{p_w}+\nabla^2\nabla\boldsymbol{u_w}-\nabla\boldsymbol{u_w} \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{u_a}=-\frac{1}{\mathcal{R}}\nabla^2\boldsymbol{p_a}+\mathcal{N}\left(\nabla^2\nabla\boldsymbol{u_a}-\nabla\boldsymbol{u_a}\right) \tag{15}$$

非圧縮性流体では連続式 $\nabla u_w=0,\nabla u_a=0$ より上式から圧力方程式 $\nabla^2\boldsymbol{p_w}=0$, $\nabla^2\boldsymbol{p_a}=0$ が得られる。この条件を用いることにより上式は流速に関する方程式で表すことができる。ここで次ような流関数を導入する。

$$(U_w,W_w,U_a,W_a)=\left(\frac{\partial\Psi_w}{\partial z},-\frac{\partial\Psi_w}{\partial x},\frac{\partial\Psi_a}{\partial z},-\frac{\partial\Psi_a}{\partial x}\right) \tag{16}$$

すると、液相および気相の流速に関する方程式は次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_w=\nabla^2\nabla^2\Psi_w-\nabla^2\Psi_w \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_a=\mathcal{N}\left(\nabla^2\nabla^2\Psi_a-\nabla^2\Psi_a\right) \tag{18}$$

3　基本状態

今、厚さ Z_w の液相が厚さ Z_a の気相の上に静止している状態を考える。したがって基本状態では流速成分は全てゼロとなり、式 (9) および (12) は次のような常微分方程式となる。

$$-\frac{\mathrm{d}P_w}{\mathrm{d}z}-\mathcal{G}=0,\quad -\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}z}-\mathcal{R}\mathcal{G}=0 \tag{19a, b}$$

液相と気相の界面を z 軸の原点とすると基本状態における液相表面は $z=Z_w$ と表される。液相表面で圧力ゼロとなる条件より液相での圧力分布が求まる。また、その式を用いて気液界面 $(z=0)$ での圧力も求まるので液相における圧力分布が導かれる。液相および気相での圧力分布を示すと以下の式になる。

$$P_w=\mathcal{G}(Z_w-z),\quad P_a=\mathcal{G}(Z_w-\mathcal{R}z) \tag{20a, b}$$

4　摂動問題

4.1　摂動展開

前述の基本状態に微小な擾乱を与えることを考える。もし基本状態が不安定であれば、与えた擾乱は時間とともに発達し、液相と気相は混合してしまうであろう。逆に基本状態が安定であれば、与えた擾乱は時間とともに減衰し元の状態に戻ってしまい、液相と気相は混合しないことになる。界面の位置に擾乱を与え、次のように摂動展開する。

$$Z_i=AZ_{i1}\mathrm{e}^{\Omega t+\mathrm{i}kx},\quad Z_w=Z_{w0}+AZ_{w1}\mathrm{e}^{\Omega t+\mathrm{i}kx} \tag{21a, b}$$

ここで A および Ω, k はそれぞれ擾乱の振幅および成長率、波数である。ここで行う線形安定解析では擾乱の初期成長過程を考えるため振幅 A は無限小を仮定する。また成長率 Ω が正のとき擾乱は指数関数的に成長し基本状態は不安定となる。逆に負のとき基本状態は安定である。波数 k は波長の逆数であり、ここでは次のように表される。

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{K}{\epsilon}} \tag{22}$$

ここで λ は擾乱の波長である。界面の形状に合わせて圧力および流関数も摂動展開し次のように整理する。

$$\begin{bmatrix} Z_i(x,z,t)\\ Z_w(x,z,t)\\ P_w(x,z,t)\\ \Psi_w(x,z,t)\\ P_a(x,z,t)\\ \Psi_a(x,z,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ Z_{w0}\\ \mathcal{G}(Z_{w0}-z)\\ 0\\ \mathcal{G}(Z_{w0}-\mathcal{R}z)\\ 0\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}Z_{i1}(z)\\ Z_{w1}(z)\\ P_{w1}(z)\\ \Psi_{w1}(z)\\ P_{a1}(z)\\ \Psi_{a1}(z)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\Omega t+\mathrm{i}kx} \tag{23}$$

4.2　支配方程式

上式で求めた流関数 Ψ の摂動展開式を液相および気相の支配方程式 (17)(18) に代入し、A のオーダーの項のみを取り出すと次式のような摂動方程式が得られる。

$$\Psi_{w1}''''-\left(2k^2+1+\Omega\right)\Psi_{w1}''+k^2\left(k^2+1+\Omega\right)\Psi_{w1}=0 \tag{24}$$

$$\Psi_{a1}''''-\left(2k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right)\Psi_{a1}''+k^2\left(k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right)\Psi_{a1}=0 \tag{25}$$

摂動方程式の一般解を求めるために $\Psi_w = e^{mz}, \Psi_a = e^{nz}$ と置く。それぞれの摂動方程式に代入し、$e^{mz} \neq 0, e^{nz} \neq 0$ の条件からその式が恒等的に成立する条件式を取り出し、それぞれの方程式より m,n の解を求める。これより液相および気相の摂動方程式の一般解は次のように表される。

$$\begin{aligned}\Psi_{w1} \quad = \quad & C_{w1}\exp(kz) + C_{w2}\exp(-kz) \\ & + C_{w3}\exp\left[\sqrt{k^2+1+\Omega}\, z\right] \\ & + C_{w4}\exp\left[-\sqrt{k^2+1+\Omega}\, z\right] \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{a1} \quad = \quad & C_{a1}\exp(kz) + C_{a2}\exp(-kz) \\ & + C_{a3}\exp\left[\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}\, z\right] \\ & + C_{a4}\exp\left[-\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}\, z\right] \end{aligned} \tag{27}$$

5　線形安定解析

5.1　近似

解析を簡単にするために次のような近似をおこなう。透水係数 K は空隙率や粒径を用いて次のように表されることがわかっている [7]。

$$K = \frac{d_s^2 \epsilon^3}{180(1-\epsilon)^2} \tag{28}$$

d_s は多孔質体を構成する土砂の粒径である。ここ考えている長さスケールは透水性を表すパラメータ K を空隙率 ϵ で割った値の 1/2 乗であり、粒径 d_s の 1/10 以下のオーダーである。したがって非常に小さいと予想される。その長さスケールと比較して水の層の厚さ Z_w や空気の層の厚さ Z_a がはるかに大きく、かつ擾乱の空間スケールと比較しても十分に大きいような場合、水と空気の界面から十分遠いところでは摂動がすべてゼロとなる。したがって、次のような境界条件が適用される。

$$\Psi_{w1} = \Psi'_{w1} = 0 \quad \text{as} \quad z \to \infty \tag{29}$$

$$\Psi_{a1} = \Psi'_{a1} = 0 \quad \text{as} \quad z \to -\infty \tag{30}$$

これらの条件を式 (26),(27) に代入して考えると、未定定数 C_{w1} および C_{w3}, C_{a2}, C_{a4} は何れもゼロにならなければならないことが判る。したがって近似を用いた場合、液相および気相の摂動方程式の一般解は次のようになる。

$$\Psi_{w1} = C_{w2}\exp(-kz) + C_{w4}\exp\left[-\sqrt{k^2+1+\Omega}\, z\right] \tag{31}$$

$$\Psi_{a1} = C_{a1}\exp(kz) + C_{a3}\exp\left[\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}\, z\right] \tag{32}$$

5.2　境界条件

今、気液界面での境界条件を考える。多孔質体内部においては表面張力の影響が大きいと考えられ、その影響を加味する必要がある。今回は計算を簡単にするために表面張力の法線成分のみを考慮した。

気液界面における摂動展開式および液相および気相での摂動方程式の一般解を用いて境界条件を展開する。気液界面 $(z = Z_i)$ における法線方向 $\mathbf{e}_{ni}$ および接線方向 $\mathbf{e}_{ti}$ の単位ベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{e}_{ni} = \left(\frac{-\partial Z_i/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Z_i/\partial x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(\partial Z_i/\partial x)^2}}\right) \tag{33a}$$

$$\mathbf{e}_{ti} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\partial Z_i/\partial x)^2}}, \frac{\partial Z_i/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Z_i/\partial x)^2}}\right) \tag{33b}$$

また液相の応力テンソル、気相の応力テンソルは次のように表される。

$$\mathbf{T}_w = \begin{bmatrix} -P_w + 2\dfrac{\partial U_w}{\partial x} & \dfrac{\partial U_w}{\partial z} - \dfrac{\partial W_w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_w}{\partial z} - \dfrac{\partial W_w}{\partial x} & -P_w + 2\dfrac{\partial W_w}{\partial z} + \mathcal{S}\dfrac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} -P_a + 2\mathcal{M}\dfrac{\partial U_a}{\partial x} & \mathcal{M}\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial z} - \dfrac{\partial W_a}{\partial x}\right) \\ \mathcal{M}\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial z} - \dfrac{\partial W_a}{\partial x}\right) & -P_a + 2\mathcal{M}\dfrac{\partial W_a}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{35}$$

液相の応力テンソルに現れる $-\mathcal{S}(\partial^2 Z_i/\partial x^2)$ の項は気液界面での表面張力を考慮した項である。表面張力は M/T^2 のスケールを持ち、$\mathcal{S}$ は表面張力 σ を用いて以下の式で表される無次元パラメータである。

$$\mathcal{S} = \sigma \frac{K^{1/2}}{\rho_w \epsilon^{1/2} \nu_w^2} \tag{36}$$

また、表面張力項は曲率半径 r を含む式に以下の近似を用いて算出している。

$$\sigma\frac{1}{r} = \frac{-\sigma(\partial^2 Z_i/\partial x^2)}{[1+(\partial Z_i/\partial x)^2]^{3/2}} \approx -\sigma\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \tag{37}$$

上記の式に無次元化を導入することにより式 (35) の表面張力の項が導かれる。以下で境界条件を設定する。

気相と液相の界面では流線および流速が連続するので次式が成立する。

$$\Psi_w(x,z,t) = \Psi_a(x,z,t) \tag{38}$$

$$\Psi'_w(x,z,t).\mathbf{e}_{ni} = \Psi'_a(x,z,t).\mathbf{e}_{ni} \tag{39}$$

気液界面上の流体粒子は界面の形状と同じ動きをする。この運動学的境界条件は次のように表される。

$$W_w(Z_i) = \frac{\partial Z_i}{\partial t} + U_w(Z_i)\frac{\partial Z_i}{\partial x} \tag{40}$$

気液界面では接線方向および法線方向の応力が連続する。したがって次の式が成立する。

$$\mathbf{e}_{ti}.\mathbf{T}_w.\mathbf{e}_{ni} = \mathbf{e}_{ti}.\mathbf{T}_a.\mathbf{e}_{ni} \tag{41}$$

$$\mathbf{e}_{ni}.\mathbf{T}_w.\mathbf{e}_{ni} = \mathbf{e}_{ni}.\mathbf{T}_a.\mathbf{e}_{ni} \tag{42}$$

上記で求めた式 (38)-(42) の境界条件に式 (23) の摂動展開式を代入し、O(A) のオーダーを取る。式 (38)(39)(40) は次のようになる。

$$C_{w2} + C_{w4} - C_{a1} - C_{a3} = 0 \tag{43}$$

$$-kC_{w2} - \sqrt{k^2+1+\Omega}\,C_{w4} - kC_{a1} - \sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}\,C_{a3} = 0 \tag{44}$$

$$\mathrm{i}kC_{w2} + \mathrm{i}kC_{w4} + \Omega Z_{i1} = 0 \tag{45}$$

式 (41) を展開し、整理すると次式のようになる。

$$-k^2\Psi_{w1}(0) + \Psi''_{w1}(0) = -k^2\mathcal{M}\Psi_{a1}(0) + \mathcal{M}\Psi''_{a1}(0) \quad (46)$$

$$(1+\Omega)C_{w4} - \mathcal{M}\left(1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right)C_{a3} = 0 \quad (47)$$

式 (42) に関しては次のように展開される。

$$\begin{aligned} &P_{w1}(0) + P'_{w0}(0)Z_{i1} + 2\mathrm{i}k\Psi'_{w1}(0) + k^2\mathcal{S}Z_{i1} \\ &\quad = P_{a1}(0) + P'_{a0}(0)Z_{i1} + 2\mathrm{i}k\mathcal{M}\Psi'_{a1}(0) \end{aligned} \quad (48)$$

上式中に使われる P_{w1} や P_{a1} については式 (8)(11) から得られる。両式を $z = Z_i$ で評価し摂動展開すると次式が得られる。

$$P_{w1}(0) = \mathrm{i}k^{-1}\left[\left(k^2+1+\Omega\right)\Psi'_{w1}(0) - \Psi'''_{w1}(0)\right] \quad (49)$$

$$P_{a1}(0) = \mathrm{i}k^{-1}\mathcal{M}\left[\left(k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right)\Psi'_{a1}(0) - \Psi'''_{a1}(0)\right] \quad (50)$$

また式 (19) より次式が得られる。

$$P'_{w0}(0) = -\mathcal{G}, \quad P'_{a0}(0) = -\mathcal{G}\mathcal{R} \quad (51)$$

式 (49)-(51) を式 (48) に代入すると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}k\,(2k+1+\Omega)\,C_{w2} + 2\mathrm{i}k\,\sqrt{2k+1+\Omega}C_{w4} \\ &+\mathrm{i}k\mathcal{M}\left(2k+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right)C_{a1} + 2\mathrm{i}k\mathcal{M}\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}C_{a3} \\ &\qquad + \left[k\mathcal{G}\,(1-\mathcal{R}) - k^3\mathcal{S}\right]Z_{i1} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

5.3 数値解析

式 (43)-(45),(47),(52) より次のような形の代数方程式が得られる。それぞれ l_{ij} と合わせて以下に示す。

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{w2} \\ C_{w4} \\ C_{a1} \\ C_{a3} \\ Z_{i1} \end{pmatrix} = 0 \quad (53)$$

$$l_{11} = 1, \quad l_{12} = 1, \quad l_{13} = -1, \quad l_{14} = -1, \quad l_{15} = 0,$$

$$l_{21} = -k, \quad l_{22} = -\sqrt{k^2+1+\Omega}, \quad l_{23} = -k,$$

$$l_{24} = -\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}, \quad l_{25} = 0, \quad l_{31} = \mathrm{i}k, \quad l_{32} = \mathrm{i}k,$$

$$l_{33} = 0, \quad l_{34} = 0, \quad l_{35} = \Omega, \quad l_{41} = 0, \quad l_{42} = 1+\Omega,$$

$$l_{43} = 0,\ l_{44} = -\mathcal{M}\left(1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right),\ l_{45} = 0,\ l_{51} = \mathrm{i}k(2k^2+1+\Omega),$$

$$l_{52} = 2\mathrm{i}k^2\sqrt{k^2+1+\Omega}, \quad l_{53} = \mathrm{i}k\mathcal{M}\left(2k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right),$$

$$l_{54} = 2\mathrm{i}k^2\mathcal{M}\sqrt{k^2+1+\frac{\Omega}{\mathcal{N}}}, \quad l_{55} = k\mathcal{G}(1-\mathcal{R}) - k^3\mathcal{S}$$

l_{ij} で表される行列部を $\mathbf{L}_s$ とすると、上式が自明でない解を持つためには次の条件が成り立たなければならない。

$$|\mathbf{L}_s| = 0 \quad (54)$$

上式を Ω について解くと次のような関数が与えられる。

$$\Omega = f\,(k;\mathcal{R},\mathcal{N},\mathcal{G},\mathcal{S}) \quad (55)$$

この Ω の正負を調べれば基本状態の安定性がわかる。

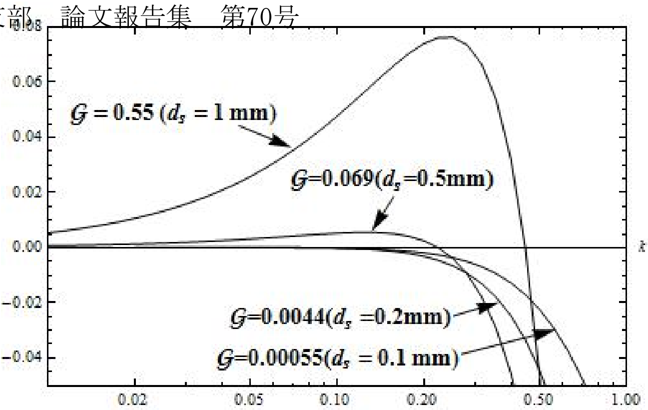

図-3 擾乱の増幅率 Ω の波数 k およびパラメータ $\mathcal{G}$ による変化。縦軸 Ω, 横軸 k を表す。$\mathcal{R} = 0.0012$，$\mathcal{N} = 15$，$\epsilon = 0.34$。

6 結果と考察

数値解析を行った結果が図 1 である。ここでは擾乱の増幅率 Ω を、水と空気の 20℃における値である $\mathcal{R} = 0.0012$ および $\mathcal{N} = 15$ の場合において、波数 k および無次元パラメータ $\mathcal{G},\mathcal{S}$ の関数として表している。空隙率は砂の場合の標準的な値である $\epsilon = 0.34$ を用いている。$\mathcal{S}$ の値は水の表面張力である $\sigma = 0.0072$ を式 (37) に代入することにより求めている。図より、増幅率 Ω は粒径が小さく、また、波数が多い場合に負の値へと移行されることが判る。つまり, それらの場合において安定状態が保たれることになる。粒径の値が大きくなると不安定性も増加し、ある点で最大値を取ることが読み取れる。粒径 $d_s = 1mm$ では、波数 $k = 0.2$〜0.3 の時に最も不安定であり、これは式 (22) より波長が代表スケール $\sqrt{K/\epsilon}$ の約 20〜30 倍の長さの時であると判る。不安定性が最大となる波数は粒径が小さくなるにつれて少なくなり、図の場合では、ある程度小さい粒径になるとほとんどの波数において安定状態が保たれることになる。

7 結論

多孔質体内部において空気の上に水が載っている状態は粒径が小さい場合において十分起こり得ることだと明らかになった。この安定状態が崩れた時に空気が噴き出すと考えられる。しかし本実験では降雨による影響を考慮出来ず、比較的大きな降雨強度の時に Rayleigh-Taylor 不安定が発生することに関しては明らかに出来ていない。今後この観点から研究を進める必要があるだろう。

参考文献

1) 前田健一, 柴田賢, 馬場干児, 桝尾孝之, 今瀬達也, 豪雨と気泡の影響を考慮した河川堤防における透気遮水シートの設置効果, ジオシンセティク論文集, Vol. 25, pp. 107–111, 2010.

2) 愛知県建設部河川課:平成 12 年 9 月豪雨災害

3) 泉典洋, 前田健一, 浸透層内における Rayleigh-Taylor 不安定, 応用力学論文集,Vol.16,pp.545-551,2013

4) Brinkman, H. C., A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Appl Sci. Res.*, A1, 27–34, 1947.

5) Whitaker, S., The Forchheimer equation: a theoretical development, *Transport in Porous Media*, 25, 27–61, 1996.

6) Breugem, W. P., Boersma, B. J., and Uittenbogaard, R. E., The influence of wall permeability on turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 562, 35–72, 2006.

7) MacDonald, I. F., El-Sayed, M. S., Mow, K. and Dullien, F. A. L., Flow through porous media: the Ergun equation revisted, *Indust. Engng Chem. Fund.*, 18, 199–208, 1979.