

弾性拘束された構造部材の座屈荷重におけるべき乗則の導出

A derivation of power law rule in buckling loads of structural members with an elastic restraint

北海道大学工学部環境社会工学科 ○学生員 丸山俊樹 (Toshiki Maruyama)
 北海道大学大学院工学院 学生員 小西善晃 (Yoshiteru Konishi)
 北海道大学大学院工学研究院 正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

一般に弾性拘束、支持された梁やシェルなどの構造部材は、座屈荷重が増加し、座屈モードに高次の波数が含まれることが構造力学的に知られている。本研究ではこのような構造部材が弾性拘束を受ける場合において座屈荷重に関する「べき乗則」が存在することを理論的に示す。具体的には構造部材として Winkler ばねにより支持される

- ・軸圧縮荷重を受ける梁
 - ・静水圧荷重を受ける円筒シェル(二次元平面ひずみ状態)
 - ・静水圧荷重をうける完全球シェル
- の3点を取り上げ、座屈荷重と Winkler ばねを関係づけるべき乗則を導出し、その特性を検証する。

2. 解析モデル

図-1 は本研究における各解析モデルを示したものである。 P は外圧を表し等方的に作用するものとする。 L は梁の長さを表し、 a , r はそれぞれシェルの半径、ポアソン比を示す。 u , v , w はそれぞれ θ 方向、 ϕ 方向、半径方向のシェルの変位を表す。またシェルの厚さを h 、各解析モデルのヤング係数を E とする。またシェル内部においては弾性媒質で満たされているものとし、 k_f は弾性媒質のばね剛性を示す。

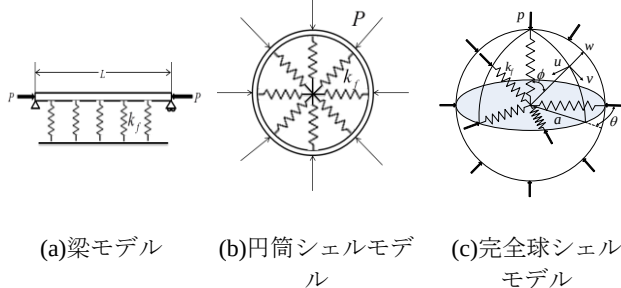


図-1 各解析モデル

3. 座屈荷重の導出

3.1 梁の座屈荷重の導出

弾性媒質を下に有する両端単純支持梁が圧縮力を受けるときの支配方程式は以下のように表される。

$$EIw'' + Pw'' + k_f w = 0 \quad (1)$$

ここで、 E , I , w , P , k_f はそれぞれ弾性係数、断面2次モーメント、たわみ変位、軸圧縮力、ばね定数を表している。また梁の両端での境界条件は以下ようになる。

$$x=0, L \text{ において } w=w''=w'''=0 \quad (2)$$

式(1), (2)より方程式を解くことによって座屈荷重を求めると次式になる。¹⁾

$$P_\sigma = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 EI + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 k_f \quad n=1,2,3,\dots \quad (3)$$

3.2 円筒シェルの座屈荷重の導出

内部に弾性媒質を有する円筒シェルにおいて外圧 P を受けるときの支配方程式は以下の2つの式で表される。

$$EAa^2(v_1' + w_1') + EI(v_1 - w_1)'' = 0 \quad (4)$$

$$EAa^2(v_1' + w_1') - EI(v_1 - w_1)''' + Pa^3(w_1'' + w_1) + k_f a^4 w_1 = 0 \quad (5)$$

ここで、 A , a , v_1 , w_1 はそれぞれ断面積、シェル内径、座屈後の伸びまたは縮み変位、座屈後の曲げ変位を表す。円筒シェルでは v_1 , w_1 は θ の関数によって以下のように表される。

$$v_1 = B \sin n\theta \quad (6)$$

$$w_1 = C \cos n\theta \quad (7)$$

B と C は定数、 n は正の整数である。式(4), (5)から係数行列の行列式が0になることから座屈荷重を求めると以下になる。¹⁾

$$P_\sigma = (n^2 - 1) \frac{EI}{a^3} + \frac{1}{n^2 - 1} k_f a \quad n=2,3,4,\dots \quad (8)$$

3.3 完全球シェルの座屈荷重の導出

完全球シェルの座屈現象に対応する支配方程式は座屈時の変位 u を用いて次式で表される。

$$\begin{pmatrix} c_m^{(11)} & c_m^{(12)} \\ c_m^{(21)} & c_m^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

座屈荷重は次式のように代数方程式の固有値問題を解くことで得ることができる。²⁾

$$\det \begin{pmatrix} c_m^{(11)} & c_m^{(12)} \\ c_m^{(21)} & c_m^{(22)} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

$c_m^{(11)}$, $c_m^{(12)}$, $c_m^{(21)}$, $c_m^{(22)}$ はそれぞれ以下のように表すことが出来る。

$$c_m^{(11)} = (1+k)(\lambda_m + 1 + \nu) + (1+\nu) \frac{w_0}{a} \quad (11)$$

$$c_m^{(12)} = (1+k)(1+\nu)(\lambda_m + 2) + k(\lambda_m^2 + 2k\lambda_m) + \frac{w_0}{a}(1+\nu)(1+\lambda_m) \quad (12)$$

$$c_m^{(21)} = (1+k)(1+\nu) + k\lambda_m + \frac{w_0}{a}(1+\nu) \quad (13)$$

$$c_m^{(22)} = 2(1+k)(1+\nu) + k\lambda_m(\lambda_m + 3 + \nu) + \frac{a^2 k_f (1-\nu^2)}{Eh} + \frac{w_0}{a}(1+\nu)(\lambda_m + 2) \quad (14)$$

ここで、 m は波数であり k , λ_m はそれぞれ次式で表される。

$$k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (15)$$

$$\lambda_m = m(m+1) - 2 \quad (16)$$

4. 解析結果

図-2 と図-3 の座屈荷重比は、算出された座屈荷重に $k_f = 0$ のときの座屈荷重式 P_0 の逆数を乗じて無次元化したものである。これより、厚肉比と剛性比の増加に伴い座屈荷重も増加する。また、両常用対数をとると直線の傾きが $1/2$ で一定となり、べき乗則に対応することがわかった。

また、図-4 は完全球シェルにおける座屈荷重と剛性比を両常用対数にとったグラフである。ある剛性比の範囲では、傾きがおおよそ $3/2$ となることがわかった。

図-2 と図-3 のグラフの傾きは式変形からも導出できる。まず、梁の場合について導出していくと下記のようになる。

$$P_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ より}$$

$$\frac{P}{P_0} = n^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{k_f}{EI} \quad (17)$$

式(17)が最小値をとるとき n の値は以下となる。

$$n = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{k_f}{EI}} \quad (18)$$

式(18)を式(17)に代入すると、

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{L^4}{I}} \sqrt{\frac{k_f}{E}} \quad (19)$$

式(19)の両辺常用対数をとると、

$$\log_{10} \left(\frac{P_{cr}}{P_0} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{k_f}{E} \right) + \log_{10} \left(\frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{L^4}{I}} \right) \quad (20)$$

次に円筒シェルの場合について導出していくと、

$$P_0 = \frac{3EI}{a^3} \text{ より}$$

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \frac{n^2 - 1}{3} + \frac{k_f a^4}{3EI(n^2 - 1)} \quad (21)$$

式(21)が最小値をとるとき n の値は以下となる。

$$n = a \left(\frac{k_f}{EI} \right)^{1/4} \quad (22)$$

式(22)を式(21)に代入すると、

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \sqrt{\frac{k_f a}{E}} \left(\frac{16}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right)^{1/2} \quad (23)$$

式(23)の両辺常用対数をとると、

$$\log_{10} \left(\frac{P_{cr}}{P_0} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{k_f a}{E} \right) + \log_{10} \left(\frac{16}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right)^{1/2} \quad (24)$$

また、図-4 における $k_f = 0$ のときの座屈荷重式 P_0 は以下のように表される。

$$P_0 = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (25)$$

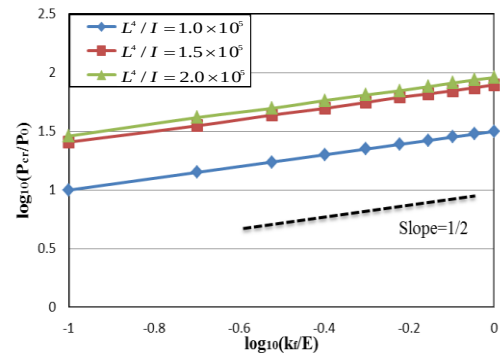


図-2 梁の剛性比に対する座屈荷重比

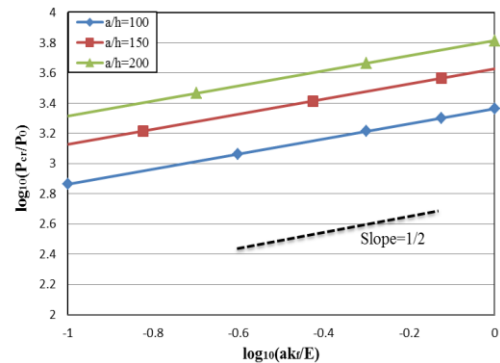


図-3 円筒シェルの剛性比に対する座屈荷重比

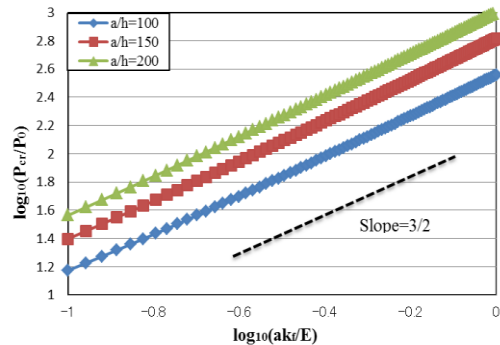


図-4 完全球シェルの剛性比に対する座屈荷重比

5. まとめ

本研究にて得られた知見、成果は以下の通りである。

- (1) Winkler ばねにより弾性拘束された梁、円筒シェルの座屈荷重を計算した結果、Winkler ばね剛性に対し $1/2$ 乗のべき乗則に従うことがわかった。
- (2) 梁、円筒シェルに関する(1)の $1/2$ 乗則を若干の式変形により解析的に導出した。
- (3) それに対し Winkler ばねにより弾性拘束された完全球シェルはおおよそ $3/2$ 乗のべき乗則に従うことが確認された。現在近似的な式展開により、完全球シェルのべき乗則が導出可能か検討中である。

謝辞

本研究は科研費挑戦的萌芽研究(研究課題番号: 24651183, 研究代表者: 佐藤太裕)により実施されたことを付記し、関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) D.O.Bruth and B.O.Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975.
- 2) M.Sato, M.A.Wadee, T.Sekizawa, K.Iiboshi, and H. Shima: Hydrostatically pressurized buckling of complete spherical shells filled with an elastic medium, 土木学会論文集 A2 (応用力学) Vol.67,