p-Ritz 法における試行関数の改良

An improvement of trial function in p-Ritz method

函館工業高等専門学校　正　　員　渡辺　力 (Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校　学生会員　植田和紀 (Kazuki UEDA)
函館工業高等専門学校　学生会員　山田脩平 (Shuhei YAMADA)

1.　まえがき

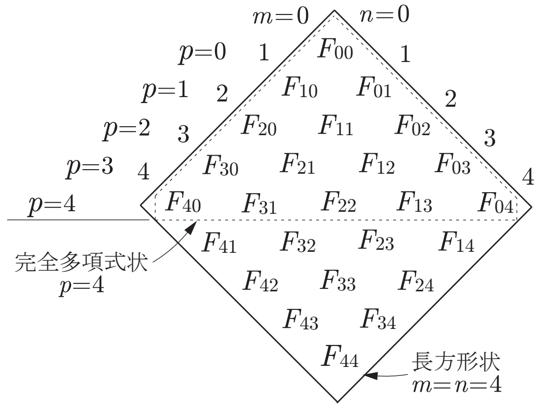
変分直接法の一つである Ritz 法は，古くから平板の曲げ解析，自由振動解析，座屈解析などに広く用いられている[1)]．この Ritz 法の基底関数にはべき多項式が用いられており，べき多項式と幾何学的境界条件を満たすための境界関数とを組み合わせた基底関数を用いる Ritz 法は，p-Ritz 法と呼ばれている[2)]．

しかしながら，べき多項式を用いる Ritz 法では，級数項（多項式の次数）が増大すると剛性行列の条件数が大きくなって消去演算での丸め誤差の影響が顕著となることから，べき多項式の代わりに種々の関数が基底関数に用いられている．例えば，Chebyshev の三角多項式，Spline 関数，Timoshenko はりの固有関数，平板の固有関数など，種々の関数が用いられている．

このような基底関数を用いた Ritz 法の研究でも，平板の自由振動解析に適用した研究は多くあるものの，平板の曲げ解析への適用した研究は極めて少ない．また，平板の曲げ解析に Ritz 法を適用した場合，変位や応力の十分な収束値を得るためには自由振動解析に比べて級数項を極めて多く用いる必要があり，丸め誤差の影響を受け易いべき多項式を用いる p-Ritz 法では高精度な応力や合応力を計算することは困難となる．

本研究では，p-Ritz 法を一次せん断変形理論に基づく平板の曲げ解析と自由振動解析に適用し，高精度な応力と合応力，固有振動数を求めるために，試行関数に改良を加える．基底関数には，Legendre 多項式や第一種 Chebyshev 多項式などの直交多項式と境界関数を組み合わせた関数を用いる．さらに，p-Ritz 法の試行関数では高次項を省略した完全多項式状の変位場が用いられるが[2)]，変位と応力の収束性を改善するために，高次項を省略せずに与えられた展開項数までの全ての項を用いる長方形状の変位場を採用する．

本報告では，一次せん断変形理論に基づく平板の自由振動解析に改良した p-Ritz 法を適用して，直交多項式と長方形状の変位場を用いる効果を調べた結果について報告する．



図–1　関数 F_{mn} の階層図（変位場の採り方）

2.　試行関数の改良

(1)　試行関数と基底関数

Mindlin の板曲げ理論に基づき，板中央面の変位を次の試行関数で仮定する．

$$
\begin{aligned}
w(\xi,\eta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \phi^w_{mn}(\xi,\eta)\cdot c^w_{mn} \\
\phi_x(\xi,\eta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \phi^x_{mn}(\xi,\eta)\cdot c^x_{mn} \\
\phi_y(\xi,\eta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \phi^y_{mn}(\xi,\eta)\cdot c^y_{mn}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここに，式 (1) の c^w_{mn}, c^x_{mn}, c^y_{mn} は未定係数である．ϕ^w_{mn}, ϕ^x_{mn}, ϕ^y_{mn} は幾何学境界条件を満たす基底関数で，次式で与える．

$$
\left.
\begin{aligned}
\phi^w_{mn}(\xi,\eta) &= \phi^w_1(\xi,\eta)\cdot F_{mn}(\xi,\eta) \\
\phi^x_{mn}(\xi,\eta) &= \phi^x_1(\xi,\eta)\cdot F_{mn}(\xi,\eta) \\
\phi^y_{mn}(\xi,\eta) &= \phi^y_1(\xi,\eta)\cdot F_{mn}(\xi,\eta)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2}
$$

式 (2) の ϕ^w_1, ϕ^x_1, ϕ^y_1 は，幾何学的境界条件を満足させるための境界関数である．また，p-Ritz 法では関数 F_{mn} にべき多項式が用いられるが，本研究では，Legendre 多項式，第一種 Chebyshev 多項式について検討する．

図 – 1 は，式 (1) の試行関数において，展開項数 M=N=4 としたときの関数 F_{mn} の階層図である．なお，未定係数 c^w_{mn} などについても同じ階層図となる．p-Ritz 法では，高次項を省略して，図の点線で囲まれた完全多項式状の変位場が用いられるが[2)]，本研究では高

次項を省略せずに与えられた展開項数までの全ての項を用いる長方形状の変位場を採用する．

(2)　関数 F_{mn}

式 (2) の関数 F_{mn} には，p-Ritz 法で用いられるべき多項式の他に，Legendre 多項式，第一種 Chebyshev 多項式を用いる．

1) べき多項式

$$F_{mn}(\xi,\eta) \;=\; \xi^m\;\eta^n \tag{3}$$

2) Legendre 多項式

$$F_{mn}(\xi,\eta) \;=\; P_m(\xi)\;P_n(\eta) \tag{4}$$

ここに,

$$\begin{aligned} &P_0(\xi) \;=\; 1, \quad P_1(\xi) \;=\; \xi \\ &P_{n+1}(\xi) \;=\; \frac{(2n+1)}{(n+1)}\,\xi P_n(\xi) - \frac{n}{(n+1)}\,P_{n-1}(\xi) \\ &\qquad\qquad (\;n \geqq 1\;) \end{aligned} \tag{5}$$

3) 第一種 Chebyshev 多項式

$$F_{mn}(\xi,\eta) \;=\; T_m(\xi)\;T_n(\eta) \tag{6}$$

ここに,

$$\begin{aligned} &T_0(\xi) \;=\; 1, \quad T_1(\xi) \;=\; \xi \\ &T_{n+1}(\xi) \;=\; 2\,\xi\,T_n(\xi) - T_{n-1}(\xi) \quad (\;n \geqq 1\;) \end{aligned} \tag{7}$$

3.　剛性方程式と固有方程式

(1)　ひずみエネルギー

式 (1) の試行関数（変位関数）を用いて，ひずみエネルギー U は次式で与えられる．

$$U \;=\; \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,dV \;=\; \frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^T\,[\,\boldsymbol{K}\,]\,\boldsymbol{C} \tag{8}$$

(2)　外力仕事

平板に，面外等分布荷重 q_0 が満載された場合の外力仕事は,

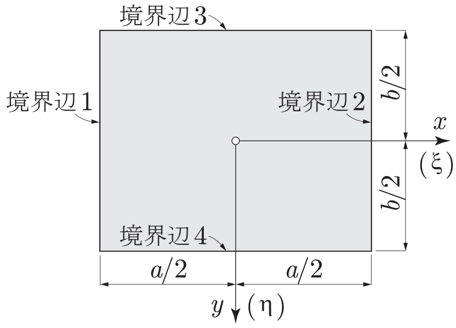
$$\begin{aligned} W \;&=\; -\iint q_0\;w(\xi,\eta)\;dxdy \\ &=\; -\boldsymbol{C}^T\,\{\,\boldsymbol{P}\,\} \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここに，$\boldsymbol{P}$ は荷重ベクトルである．

(3)　運動エネルギー

式 (1) において，板中央面の変位 w, ϕ_x, ϕ_y に e^{ipt} を掛けて動的変位を与える．ここに，p は固有円振動数，e は自然対数の底，i は虚数単位である．板の質量密度を ρ とすると，板の運動エネルギー T は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} T \;&=\; \frac{1}{2}\int_V \rho\,(\,\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\,)\,dV \\ &=\; -\frac{1}{2}\,p^2\,\boldsymbol{C}^T\,[\,\boldsymbol{M}\,]\,\boldsymbol{C} \end{aligned} \tag{10}$$



図–2　計算モデル

(4)　剛性方程式

全ポテンシャルエネルギー π に，式 (8), (9) を用いると,

$$\pi \;=\; U \,+\, W \;=\; \frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{P} \tag{11}$$

となる．Ritz 法による極値条件より，次の連立方程式が得られる．

$$\boldsymbol{K}\;\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{P} \tag{12}$$

(5)　固有方程式

自由振動解析における全ポテンシャルエネルギー π は，式 (8), (10) を用いて

$$\pi \;=\; U \,+\, T \;=\; \frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{C} - \frac{1}{2}\,p^2\,\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{C} \tag{13}$$

となる．Ritz 法による極値条件より，次の固有方程式が得られる．

$$[\,\boldsymbol{K} \,-\, p^2\,\boldsymbol{M}\,]\,\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{O} \tag{14}$$

4.　数値計算例

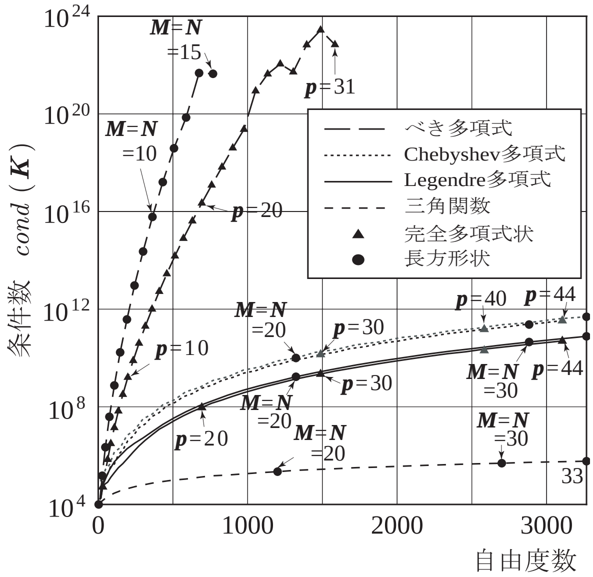
計算モデルは，**図–2** に示す長さ a，幅 b，厚さ h の周辺単純支持板を用いる．板の形状比 a/b=1，板厚比 h/b=1/10 とする．材料定数は，弾性係数 E，ポアソン比 ν=0.3 とし，せん断補正係数は自由振動解析で k=π^2/12，曲げ解析で k=5/6 を用いる．

(1)　条件数

べき多項式を用いる p-Ritz 法では剛性行列の条件数が大きくなって，行列の消去演算で丸め誤差が大きくなる．ここでは，剛性行列の条件数を調べる．

行列の条件数には種々の定義があるが，一般に行列の絶対値最大の固有値 λ_{max} と絶対値最小の固有値 λ_{min} の比を用いることが多い．式 (8) の剛性行列 $\boldsymbol{K}$ の条件数を次のように定義する．

$$cond(\,\boldsymbol{K}\,) \;=\; \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{15}$$



図–3　剛性行列の条件数

図–3 は，式 (2) の F_{mn} にべき多項式，Chebyshev 多項式，Legendre 多項式を用いたときの条件数を縦軸に対数で示したもので，横軸には自由度数を採っている．破線がべき多項式，点線が Chebyshev 多項式，実線が Legendre 多項式を用いた場合で，▲印は完全多項式状，●印は長方形状に変位場を採った場合である．

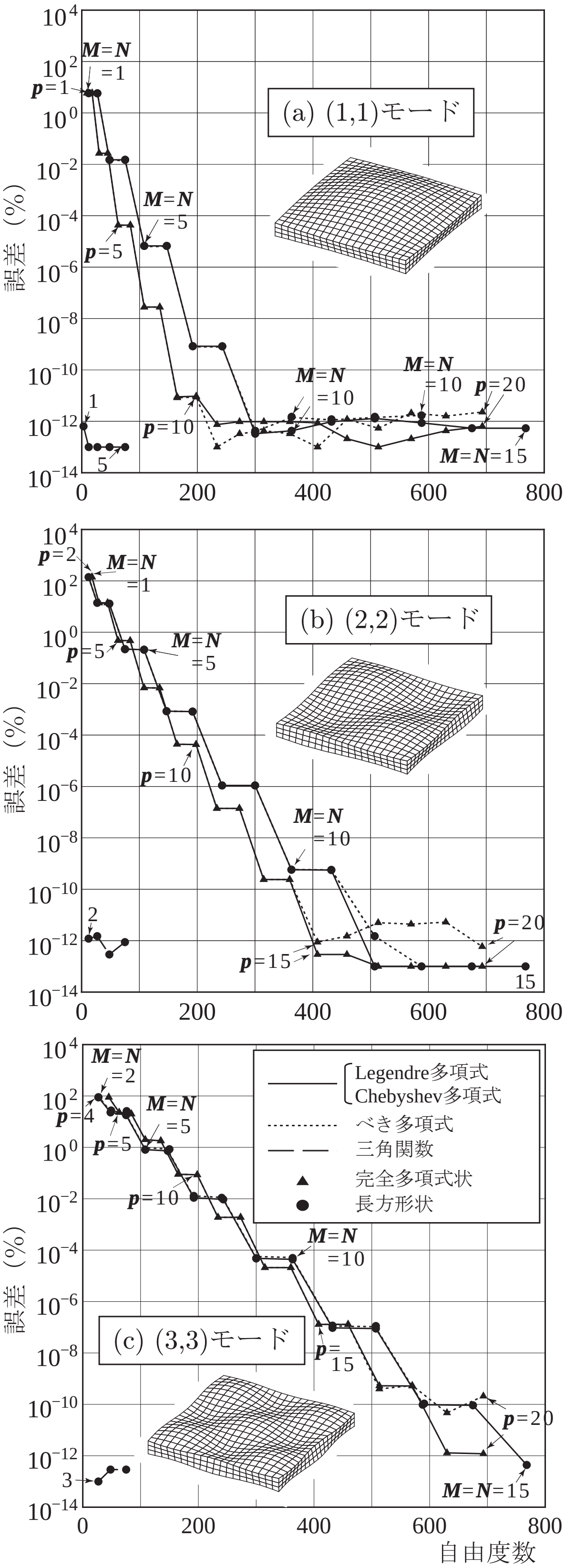
図より，べき多項式を用いた場合には極めて条件数が大きくなり，完全多項式状に採った場合には p=32 次式，長方形状に採った場合には M=N=16 次式以上で行列の消去演算ができなくなる．それに対して，Chebyshev 多項式や Legendre 多項式の直交多項式を用いた場合には，べき多項式を用いる場合に比べ条件数が小さくなり，変位場の採り方を長方形状に用いても完全多項式状に用いても条件数はほぼ同じである．

(2)　固有振動数の誤差

図–4～6 は，曲げ振動モード I−A，II−A，III−A モードの固有振動数について，解析解[3)]に対する誤差を示したものである．図は，縦軸に固有振動数の誤差 (%) を対数で，横軸には自由度数を採っている．実線が Legendre 多項式と点線 Chebyshev 多項式，点線がべき多項式を用いた場合で，▲印は完全多項式状，●印は長方形状に変位場を採った場合である．

多項式の変位場を用いた場合には，どのような多項式を用いても計算値は同じになる．Legendre 多項式と点線 Chebyshev 多項式では計算値の誤差は同じになっているが，べき多項式では多項式の次数が大きくなると，丸め誤差の影響により一致していない．

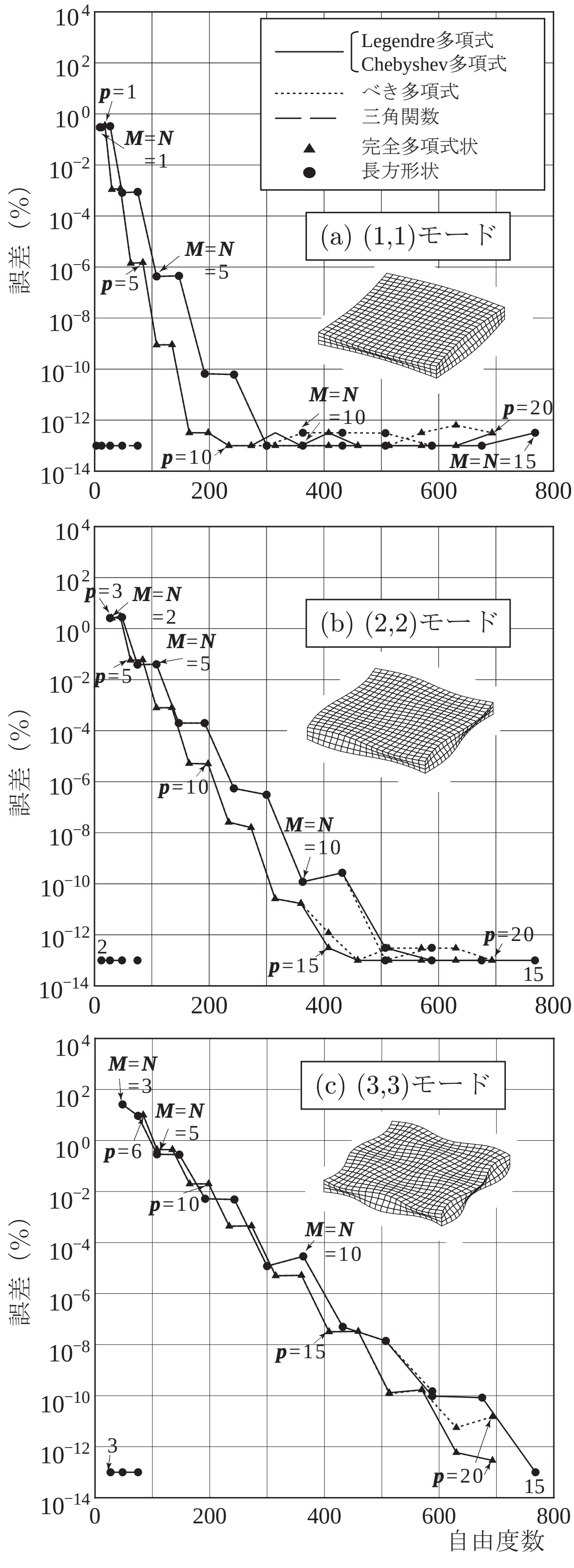
図–4～6 より，p-Ritz 法では展開項数を多く採るとどのモードでも高精度の固有振動数が得られている．ま



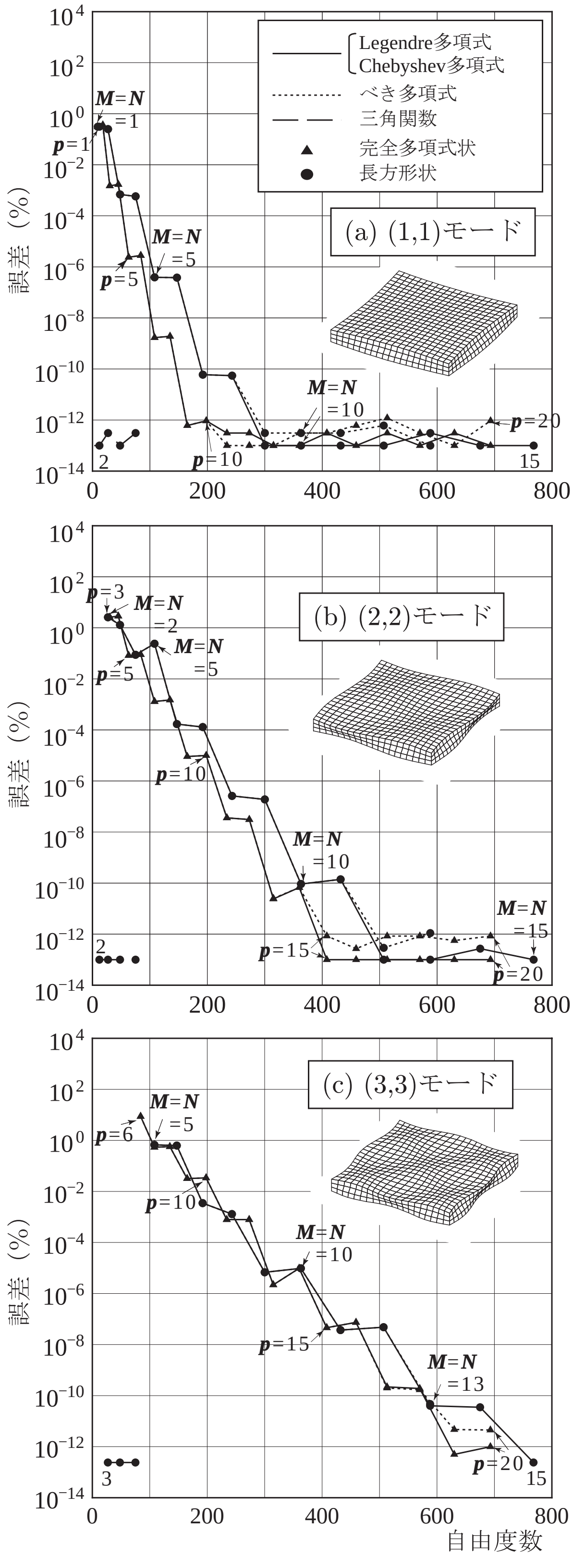
図–4　I-A モード

た，波数の小さな低次モードでは完全多項式状に採った方が収束性は良いが，高次モードになるに従い完全多項式状と長方形状に変位場を採った場合の収束性はほぼ同じとなっている．

自由振動解析では長方形状の変位場を用いる効果は余



図–5　II-A モード



図–6　III-A モード

り無いが，曲げ解析では顕著に表れる．

参考文献

1) 吉識雅夫, 川井忠彦：平板の曲げ, 振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について (I) , 造船協會論文集, Vol.117, pp.153-163, 1965.

2) Liew,K.M., Xiang,Y., Kitipornchai,S. and Wang, C.M. : *Vibration of Mindlin Plates: Programming the p-Version Ritz Method*, Elsevier, 1998.

3) Mindlin, R.D., Schacknow, A. and Deresiewicz, H. : Flexural vibrations of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.23, pp.430–436, 1956.