

領域形状の異なる二次元要素を用いた

Raviart-Thomas 型形状関数の基本特性について

Fundamental characteristics of the shape functions for the Raviart-Thomas space on various two-dimensional elements

北海道大学大学院工学院 ○学生員 東恭将 (Yasumasa Azuma)
 北海道大学大学院工学院 学生員 上田明人 (Akito Ueda)
 北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)

1. 研究背景

近年、有限要素法を利用した解析においては高性能で安価なコンピュータの普及により大規模な構造解析が比較的容易に行えるようになりつつある。特に、コンピュータの高い性能を利用して膨大な数の要素に解析領域を分割し、解析精度の向上を図ることも不可能ではなくなった。しかし、コンピュータの性能に頼り要素分割数を増やすだけでなく、解析手法自体を進展させることによる精度の向上も必要である。

そこで、これまで上田ら¹⁾によって混合ハイブリッド有限要素法（以下、MHF）に関する研究が行われてきており、要素の流量や熱量の収支の解析において MHF は FEM と比べて少ない要素分割数で高い精度が得られることが明らかとなっている一方、解析精度は領域形状に影響されることも判明している。そこで、本研究では三角形要素に関して定式化を行い、さらに Raviart-Thomas 型形状関数²⁾を用いて解析を行う MHF に関して、簡単な二次元領域での水の流動問題を用いて要素形状の変化による MHF での解析精度の特性についてまとめた。

2. 混合ハイブリッド有限要素法（MHF）について

MHF の最大の特徴は、目的変数を要素の各境界上に与え、各要素の流量や熱量の収支を直接求めることが可能である点である。そのため、地下水流動に伴う汚染物質の拡散問題の解析、熱伝達問題における物質の状態解析等において特に有効な解析手法であるといえる。

また、MHF では、混合形式で表現された 2 つの支配方程式をそれぞれ離散化して計算を行う。そのため、MHF では目的変数や目的変数の導関数の補間の次数を自由に設定でき、目的変数よりもその導関数が重視されるような問題、例えば、流動問題や応力集中問題においても少ない要素分割数で解析精度の向上が期待できる。

3. 混合形式とは

水の流動問題において、MHF で用いられる混合形式は目的変数を増やした次式で表される。四角形要素に関する定式化は上田らが行っているため、ここでは三角形要素の定式化を紹介する。

$$k \nabla \phi = -\vec{q} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (2)$$

なお、 k は透水係数、 ϕ は速度ポテンシャル、 $\vec{q}$ は流速ベクトルを表し、(1)はダルシー則、(2)は非圧縮性流体における質量保存則を表す。このように混合形式では

目的変数の一次導関数である流速ベクトル $\vec{q}$ を直接求めることができる。さらに速度ポテンシャル ϕ を要素内部において一定値で補間したまま流速ベクトルを線形に補間するといったことも可能である。

4. 要素の正規化

解析を行うにあたり、一般座標系で表された不定形要素に関して、図-1 で表されるように三角形要素は直角二等辺三角形へと正規化した後に計算を行う。

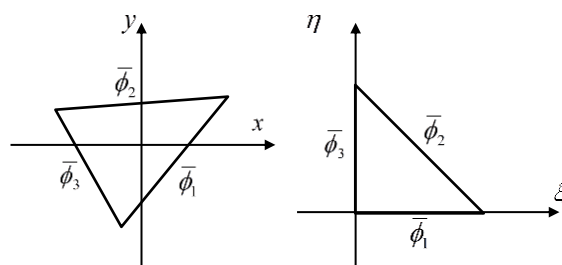


図-1 目的変数を与える位置とモデルの形状

5. Raviart-Thomas 型形状関数と変数変換

MHF では要素の境界に流量を設定しているため、FEM に用いるような形状関数とは異なる Raviart-Thomas 型形状関数を用いる。三角形要素に用いる Raviart-Thomas 型形状関数 $[RT]$ は、(3)で表される。

$$[RT] = \begin{bmatrix} \xi & \xi & -1+\xi \\ -1+\eta & \eta & \eta \end{bmatrix} \quad (3)$$

なお、三角形要素の Raviart-Thomas 型形状関数は、斜辺を ξ , η の各方向に投影したものを仮定の辺として四角形要素と同様に考えて導出する。この形状関数を用いると、 x - y 座標系での要素内の任意点の流速ベクトル (q_x, q_y) は辺上の流量 $\bar{Q}$ から(4)のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[T_k]} [T_k] [RT] \{\bar{Q}\} \quad (4)$$

ここで、

$$[T_k] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、(4)および(5)における $[T_k]$ は、正規座標系でのベクトルを一般座標系に変換する変数変換マトリクスを表している。なお、(4)において $\det[T_k]$ で除してあるのは、変数変換前後の面積変化の割合を考慮しているためである。

4. 支配方程式の離散化

(1)を離散化すると次式で表される。

$$[M] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{k}{\det[T_k]} [RT]^T [T_k]^T \begin{Bmatrix} \Delta y_i \\ -\Delta x_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} - k \Phi_k \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで

$$[M] = \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{1}{\det[T_k]} [RT]^T [T_k]^T [T_k] [RT] d\xi d\eta \quad (7)$$

次に(2)の質量保存則を有限体積法の考え方をを用いて離散化を行うと

$$\sum_i \bar{Q}_i = 0 \quad (8)$$

上式より、要素から流出する流量の総和は0であるという質量保存則が確認できる。(6)と(8)を連立方程式として解くことで解を求める。

5. 解析モデル

簡単な不定形要素問題として図-2に示す二次元モデルについて考える。モデル0は正規化した要素と同じ形の三角形要素の組み合わせ例、モデル1は四角形要素による不定形領域の例、モデル2からモデル4は不定形領域における三角形要素による要素分割及び要素数を増やした場合の解析精度の変化の例、モデル5は三角形要素と四角形要素の組み合わせの例として比較のために設定した、このモデルにDirichlet条件として左端に $\phi=1$ 、右端に $\phi=0$ を、透水係数 $k=1$ を与えた場合に左端の辺から流入する流量、および内部の流速ベクトルをそれぞれの分割方法に関して計算する。

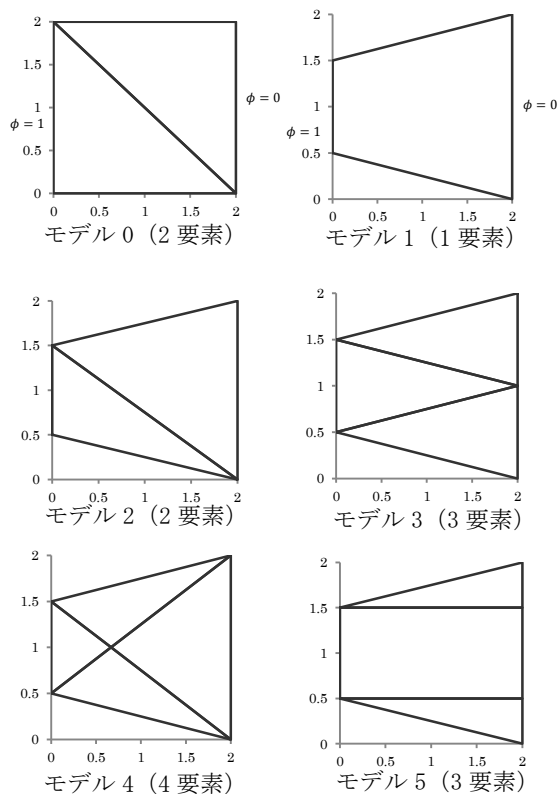


図-2 モデル形状

6. 解析結果

前述のモデルに関して計算を行った結果を表-1に示す。なお、収束値は上田らの研究¹⁾で得られている。

表-1より、流量の解析精度に関しては、三角形要素を用いる場合は要素形状が直角三角形から変化すると精度が低下することがわかった。ただし、要素分割数を増やすことにより解析精度は向上するが、その向上は小さく、三角形要素のまま分割数を向上するよりも解析領域の一部に四角形要素を混在させることの方が流量の解析精度の向上に与える影響は大きい。

また、流速ベクトルに関しては、三角形要素による要素分割では、形状関数の導出時に要素内で流速ベクトルが一次補間されるように形状関数の導出を行ったが、結果として流速ベクトルは要素内で一定値となってしまった。

さらに、一つの四角形要素を三角形要素2つに分割するよりもそのまま一つの四角形要素として計算を行った方が前述のように流量、要素内部の流速ベクトルに関して高い精度が得られるだけでなく、計算するマトリクスの大きさが小さく済み、計算負荷は小さくなる。

表-1 各分割方法の解析結果

モデル名	流量	収束値との誤差 (%)
モデル0 (2要素)	1	0
モデル1 (1要素)	0.7075	0.23
モデル2 (2要素)	0.6275	11.52
モデル3 (3要素)	0.6531	7.91
モデル4 (4要素)	0.6833	3.65
モデル5 (3要素)	0.6967	1.75

7. まとめ

MHFは、目的変数の導関数を求めたい場合、要素内への物質や熱の出入りを求めたい場合に特に有効である。

しかし、三角形要素を用いる場合は、正規化された要素形状と比べて形状が変化すると流量解析の精度が低下する。また、流速ベクトルが要素内で一定に補間されるので、三角形要素を使用する際は、形状の配置に十分留意する必要がある。

8. 今後の課題

三角形要素内部で流速ベクトルが一定となる問題に関して、補間の次元を上げて再度検討したい。

参考文献

- 1) 上田明人, 小松駿也, 蟹江俊仁: 不定形要素における二次元混合ハイブリッド有限要素法の基礎的検討, 平成24年度土木学会北海道支部論文報告集, 第69号, A-18, 2012年
- 2) P.A. Raviart and J.M. Thomas: A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606, pp. 292-315, Springer-Verlag, 1977