

トンネルへの漏水問題に対する二次元混合ハイブリッド有限要素法の適用

The Application of Two-Dimensional Mixed Hybrid FEM for the Water Leakage of Tunnel

北海道大学工学部 ○学生員 石田湧士 (Yuto Ishida)
 北海道大学院工学院 学生員 上田明人 (Akito Ueda)
 北海道大学大学院工学研究員 フェロー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)

1. 研究背景

混合ハイブリッド有限要素法(以下, MHF)とは, 目的変数がひとつである非退化形式の支配方程式を離散化し計算する一般的な FEM とは異なり, 目的変数の微分値も目的変数として考え, 2 本の支配方程式を離散化して計算する混合形式をとるものである. 違いとして MHF は FEM における目的変数よりもその一次導関数となる数量の解析, 具体的には水の流動問題や応力集中などの解析に適しているといえる. これは上田らの既往の研究¹⁾により示されており, 加えて拡流, 縮流における流量問題に対して FEM と MHF では解析値が理論解に収束する際の分割数, 計算量において MHF が有利であることが示されている. 理由として FEM では目的変数である流速ベクトルを要素節点上に定義しているのに対し, MHF では目的変数を要素境界上に定義しているのので, そこを通過する流量を直接的に算定することが可能であるからである.

本研究では現実的な問題に MHF を適用させるために, 例としてトンネルへの透水問題を考える. トンネルの施工において地盤の掘削による湧水量を正確に管理することで, 防水加工や将来的な透水による浸食を考慮した施工, 維持管理を行うことが可能になると考えられる.

2. 解析モデル

図-1 に示すような x, y で軸を定義した二次元の一般座標系モデルを考える. これは土中のトンネル 4 分割したものを想定しており, 本研究ではトンネルが地下水面より下にあることとし, 初期条件を与えて解析を行う.

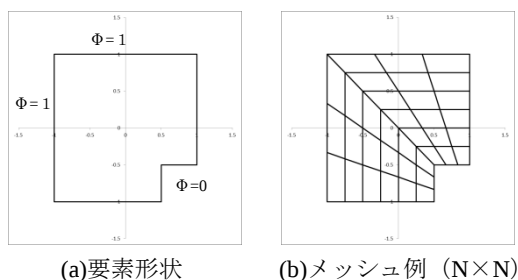


図-1 解析モデル

この要素を四角形に分割し, FEM ではその分割された要素の各節点上に目的変数を与え, MHF では各辺上に目的変数を与えることとする.

3. 混合形式における形状関数の導入

FEM における非退化形式の支配方程式である Laplace

方程式を以下に示す.

$$k\nabla^2\Phi=0 \quad (1)$$

ここに Φ は速度ポテンシャル, k は透水係数を表す.

それに対し, MHF における混合形式の Laplace 方程式を以下に示す. 新たに目的変数として流速ベクトル $\bar{q}$ がある.

$$k\nabla\Phi=-\bar{q} \quad (2)$$

$$\nabla\bar{q}=0 \quad (3)$$

(2)はダルシー則, (3)は非圧縮性流体における質量保存則を表している. 混合形式では流速ベクトルが支配方程式に含まれているため, 直接求めることができる.

MHF では要素の境界上に目的変数を与えているため, FEM に通常用いるようなものとは異なる形状関数を適用する. そこで MHF では, スカラーで定義された境界上の流量から要素内の任意点における流速ベクトルを表すことができる (4) で表されるような Raviart-Thomas 型形状関数を用いる. この形状関数はベクトルを持っており, さらに形状関数の各値を要素の辺長で除しているため, 単位長さあたりの流速ベクトルを表現することができる特徴を持つ. また, 流量の算出の際に要素からの流出方向を正としているため, 次式のような符号になっている.

$$[RT]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(1+\xi) & 0 & -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ -\frac{1}{4}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{4}(1+\eta) & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

加えて, 図-1 で示した分割では不定形要素となるが, 計算を容易にするために正規座標系に変換する. その際に用いられるのが(5)で示される変数変換の式である.

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[T_k]} [T_k] [RT] \{ \bar{Q}_i \} \quad (5)$$

ここに変数変換マトリックス $[T_k]$ は以下のように示される.

$$[T_k]=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

一般座標系におけるベクトルを求める際は, 正規座標系のベクトルと $[T_k]$ の積をとることとなる. 加えて, MHF では目的変数を辺上に与えているために面積を考慮して $\det[T_k]$ で除する必要がある.

5. 解析結果の比較

5.1. FEM と MHF の比較

モデルを $N \times N$ 分割の要素で各辺を等分した点を求めていき、メッシュを作成した。

図-2 の結果から MHF は FEM と比べると非常に高い収束性を示した。このメッシュ内に多く存在する縮流を伴う要素は実際の地盤内において透水係数が大きく異なる要素を持つ場合の解析時に多く出現するものであり、MHF を利用することで FEM よりも精度の高い結果が得られるといえる。図-3 ではその誤差量についてまとめている。

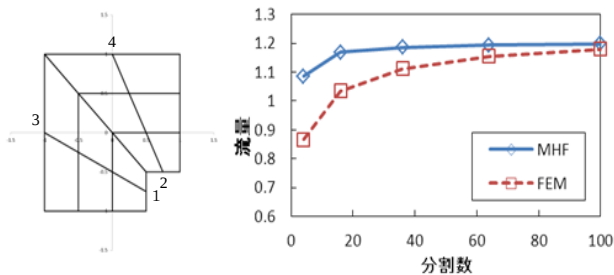


図-2 境界 1,2 から流出する流量の解析結果

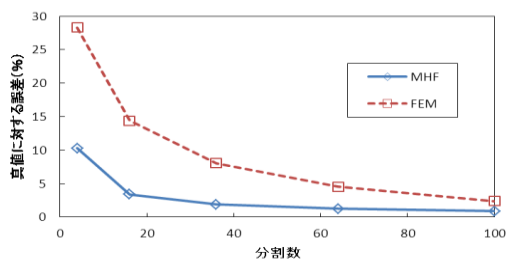


図-3 真値に対する誤差量

誤差を求める際に真値として FEM の 32×32 の分割で行った値を使用した。結果として 16 分割での誤差量が FEM の約 14% に対し、MHF は約 3% となった。

5.2. メッシュ作成方法による収束性

前項はメッシュを作成する際に分割された各要素を正方形に近づける条件のもとで MHF と FEM の比較を行っていたが、以降の解析ではその分割を増やす際の方向を固定し、偏らせることで収束値にどのような違いが現れるかというものを MHF で解析することを目的としている。図-4 では流線方向へ分割数を増やしていったものと流線直交方向に分割数を増やしていったものの流量の収束の仕方を比較している。図-5 はモデル(c)をベースとした分割の増やし方を示したモデルである。

MHF では境界上の流速分布が流量に深く関係するため(d)のモデルでは流出する流速分布を各境界上において細かく適切に評価し理論解に近い値として求めることができるようになっていたため、流量の管理が適切になされていると考えられる。

次に流線直交方向に分割数を増やしていく(e)の例を考える。この分割方法では要素境界上の流速分布を適切に評価できていないため、分割数を増やしても真値に近づくのが比較的遅いと考えられる。

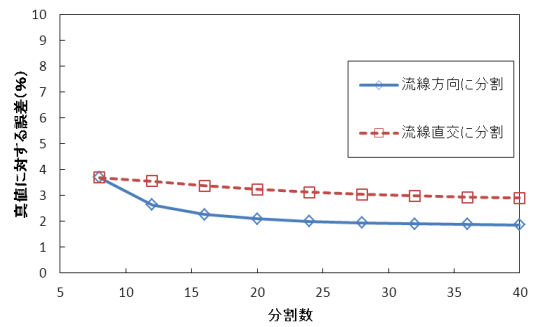
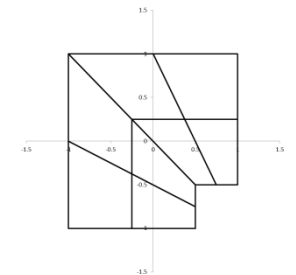
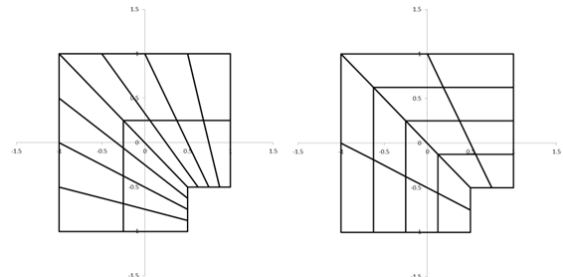


図-4 MHF の分割による収束の比較



(c)基準とする 8 分割モデル



(d)流線方向分割モデル例 (e)流線直交方向分割モデル例

図-5 MHF における解析モデル

6. まとめ

既往の研究から MHF は流量管理や応力解析において FEM より精度や計算負荷において優れていると推測されているが、本研究においてメッシュの作成方法により収束性に大きな違いが出てくるということが分かった。より高い精度の解を得るには MHF を用い、なおかつ流線方向に分割数を上げることが最も適切であると考えられる。ただし、現実問題を想定すると地盤内の流速方向を正確に知ることは困難であるため、極端に偏らせるというメッシュ作成は非現実的であると考えられる。

今後の研究では本研究よりも実際の地盤に近い複雑な透水条件を持つ要素における分割方法ごとの収束性の解析や三次元要素における分割方法の解析を行っていく。

参考文献

- 1) 上田明人, 小松駿也, 蟹江俊仁: 不定形要素における二次元混合ハイブリッド有限要素法の基礎的検討, 平成 24 年度土木学会北海道支部論文報告集, 第 69 号, A-18, 2012 年
- 2) P.A.Raviart and J.M.Thomas: A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606, Springer-Verlag, 1977