

フィルター分離 AR 法を用いたタンクモデル未知定数の推定法

Mathematical optimization method of unknown parameters in the tank model by using filter separation AR method

北海学園大学大学院 ○学生員 亀山 初基 (Hatsuki Kameyama)
 北海学園大学工学部 正 員 嵯峨 浩 (Hiroshi Saga)
 (独法) 寒地土木研究所 正 員 柳屋 圭吾 (Keigo Yanagiya)

1. はじめに

前報¹⁾では、直線分離法による流出成分に1個のタンクを対応させて未知定数の最適化を行った。しかし、直線分離法は立ち上がり点や第二折曲点の決定に主観的な判断が入る。そこで本研究では、フィルター分離 AR 法により流出成分の分離を行い、タンクモデル未知定数の最適化を行った。タンク構造は、図-2 のように2種類とし、それぞれで未知定数を最適化する手法を構築し、入出力の時間差から1個の未知定数を確定値とする工夫を行った。さらに流域の違いによる最適なタンクの構成についても検討した。また、流域ごとの解析結果から未知定数の総合化の可能性を模索した。

2. 流出成分の分離

流出成分の分離方法は、フィルター分離 AR 法³⁾を採用し、大規模出水の場合には表面流出成分、中間流出成分、地下水流出成分の3成分に、中規模出水は直接流出成分と地下水流出成分の2成分に分離した。3成分に分離した例を図-1に示す。

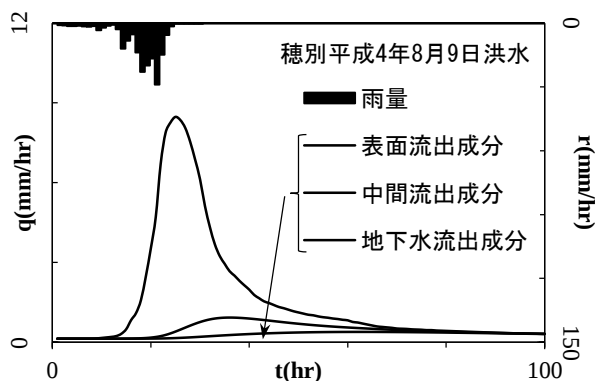


図-1 流出成分分離図

3. タンクの構造

本研究で対象としたタンクの構造を図-2に示す。

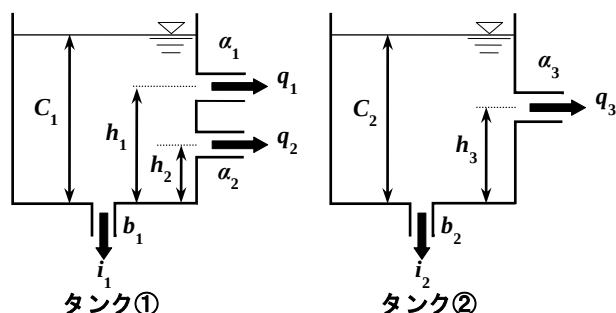


図-2 タンクモデルの構造

ここで、

C_1, C_2 : 貯留高(mm)、 $q_1 \sim q_3$: 側方流出高(mm/hr)、
 i_1, i_2 : 浸透高(mm/hr)、 $a_1 \sim a_3$: 側方流出孔係数、
 $h_1 \sim h_3$: 側方流出孔高さ(mm)、 b_1, b_2 : 浸透孔係数

図-2 において、最適化すべき未知定数は、タンク①では a_1, a_2, h_1, h_2, b_1 の5個、タンク②では a_3, h_3, b_2 の3個である。

最適化計算は、フィルター分離 AR 法によって分離した流出成分ごとに1個のタンクを対応させて行った。すなわち、3成分に分離した場合は直列三段タンクモデル、2成分の場合には直列二段タンクモデルの構成となる。また、直列三段タンクモデルの場合は上からタンク①+②+②の構成で、直列二段タンクモデルの場合はタンク①+②とタンク②+②の2つの構成で最適化を行った。

最上段タンクの入力は観測降雨であるが、下部タンクは上部タンクの未知定数が先に最適化されていることから、上部タンクの浸透高が下部タンクへの確定した入力となる。

4. 支配方程式の数値計算^{4), 5)}

本研究では、図-2 のような2種類のタンクについてそれぞれ最適化のアルゴリズムを構築したが、紙面の関係上一番複雑なタンク①のみについて述べる。支配方程式は(1)式で表される。

$$\frac{dC_1}{dt} = r - q - i_1 \quad \dots(1)$$

$$q = q_1 + q_2$$

$$q_j = \alpha_j (C_1 - h_j) \cdot Y(C_1, h_j), j=1,2 \quad \dots(2)$$

$$i_1 = b_1 \cdot C_1$$

r : 雨量、 $Y(C_1, h_j)$: ステップ関数 (Heaviside 関数)

(2)式のようにステップ関数を用いることで、貯留高と側方流出孔高さの大きさに関係なく、一つの式で表現できる。本研究では、ステップ関数の近似関数として(3)式で示される Heaviside 関数を採用した。

$$Y_j(C_1, h_j) = \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{C_1 - h_j}{\varepsilon} \right) + \frac{\pi}{2} \right\}, j=1,2 \quad \dots(3)$$

ここで、 ε は 10^{-6} 程度である。以降、 $Y_j(C_1, h_j)$ は Y_j と略記する。(1)式は見かけ上、線型微分方程式であるが実際にはステップ関数が介在するため不連続であり、非線形微分方程式である。

(2)式を(1)式に代入すると、(4)式となる。

$$\frac{dC_1}{dt} = AC_1 + B \quad \cdots(4)$$

ここで、

$$A = -(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + b_1)$$

$$B = \alpha_1 h_1 Y_1 + \alpha_2 h_2 Y_2 + r$$

(4)式を差分表示すると(5)式のようになる。

$$C_{1,k+1} = \varphi C_{1,k} + \gamma B_k \quad \cdots(5)$$

ここで、

$$\varphi = e^{AT}$$

$$\gamma = A^{-1}(e^{AT} - 1)$$

k は時間ステップ数を示す。(5)式は漸化式であり、容易に計算可能である。

4.1. 未知定数の数学的最適化

本研究では、未知定数を数学的に最適化する方法として、感度係数を用いたニュートン法を採用した。目的関数は(6)式で定義される。

$$\text{Min}J = \sum_{j=1}^N e_j^2 \quad \cdots(6)$$

ここで、

$$e_j = \frac{q_j^* - q_j}{\sqrt{q_j^*}}$$

q_j^* : 観測流出高、 q_j : 計算流出高、 N : 流量標本数

ニュートン法における($m+1$)ステップ時の未知定数は(7)式で算出される。 m は計算過程におけるステップ数を示し、 ΔP^m は補正値を示す。

$$P^{m+1} = P^m + \Delta P^m \quad \cdots(7)$$

$$\text{ここで、} P^m = \begin{bmatrix} \alpha_1^m \\ \alpha_2^m \\ h_1^m \\ h_2^m \\ b_1^m \end{bmatrix}, \Delta P^m = \begin{bmatrix} \Delta \alpha_1^m \\ \Delta \alpha_2^m \\ \Delta h_1^m \\ \Delta h_2^m \\ \Delta b_1^m \end{bmatrix}$$

補正値は、(8)式によって算出され、効率よく算定できる成分回帰手法を併用した。 T は転置を意味する。

$$\Delta P^m = [X^T X]^{-1} [X^T E] \quad \cdots(8)$$

$$\text{ここで、} E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,5} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,5} \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで、} x_{j,1} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha_1}, x_{j,2} = \frac{1}{\sqrt{q_j^*}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha_2}, \dots$$

(7)式を繰り返し計算し、(9)式の条件を満たしたならば収束とする。 ε は1%~5%程度にとれば十分である。

$$\varepsilon \geq \left| \frac{\Delta P^m}{P^m} \right| \quad \cdots(9)$$

4.2. 感度係数の算出

感度係数は未知定数の変化に対する流出高の変化を表し、効率よく補正値 ΔP^m を求めるために導入される。

感度係数 U は(10)式によって算出される。

$$U = (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)W + D \quad \cdots(10)$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial q}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial h_2} & \frac{\partial q}{\partial b_1} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{ここで、} W = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial C_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial C_1}{\partial h_1} & \frac{\partial C_1}{\partial h_2} & \frac{\partial C_1}{\partial b_1} \end{bmatrix}^T$$

$$D = [(C_1 - h_1)Y_1 \quad (C_1 - h_2)Y_2 \quad -\alpha_1 Y_1 \quad -\alpha_2 Y_2 \quad 0]^T$$

従って、(10)式における W を求めると、感度係数が求まる。 W は次式で求めることができる。

$$\frac{dW}{dt} = AW + V \quad \cdots(11)$$

ここで、

$$V = [-(C_1 - h_1)Y_1 \quad -(C_1 - h_2)Y_2 \quad \alpha_1 Y_1 \quad \alpha_2 Y_2 \quad -C_1]^T$$

(11)式は(4)式と同様に、(12)式の漸化式を用いて計算することが可能である。また、係数 A や φ 、 γ については(5)式と同じである。

$$W_{k+1} = \varphi W_k + \gamma V_k \quad \cdots(12)$$

4.3. 側方流出孔高さの理論的推定

本研究では、入力後出力が発生するまでの時間差を考慮して、側方流出孔高さ h_2 を推定する方法を考案した。未出力期間での連続の式は(13)式で表される。

$$\frac{dC_1}{dt} + C_1 \cdot b_1 = r \quad \cdots(13)$$

(13)式の解は(14)式で示される。

$$C_1(t) = C_{1,0} e^{-b_1 t} + \int_0^t e^{-b_1(t-\tau)} r(\tau) d\tau \quad \cdots(14)$$

ここで、 $C_{1,0}$ は初期貯留高である。(14)式から、出力が発生する時刻での貯留高 $C_1(t)$ を側方流出孔高さ h_2 とすれば、浸透孔係数 b_1 が決まると一義的に h_2 が決まることになり、未知定数を一つ減らすことができる。また、(14)式から任意の初期貯留高 $C_{1,0}$ を与えても、出力発生時刻が変わることはない。

5. 誤差評価指標

本研究の誤差評価指標として *Nash-Sutcliffe* 係数（以下 *NS* と略記）を採用した。*NS* は(15)式で定義される。

$$NS = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N (q_j^* - q_j)^2}{\sum_{j=1}^N (q_j^* - q_{av})^2} \quad \cdots(15)$$

ここで、 q_{av} は観測流出高の平均値である。*NS* の取り得る値の範囲は 1.0 以下であり、0.8 以上であればモデルの再現性が高いとされる。最適化計算は流出成分ごとに行うが、*NS* については、流出成分ごとではなく全体の実測値と計算値で判断する。

6. 実流域への適用

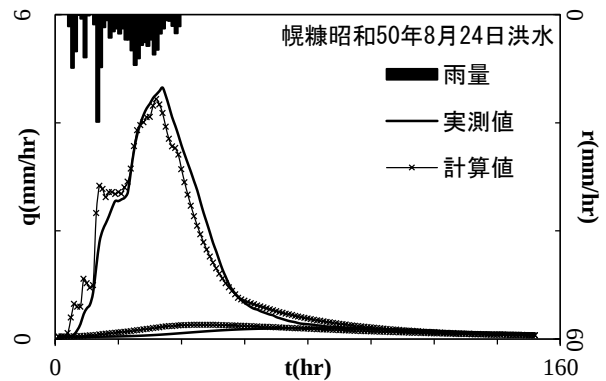
一般に、降雨流出系では遅れ現象が生じる。本研究では、入出力の主要な部分の遅れを、入出力のピークの時間差として遅れ時間と呼ぶ。また、入力後出力が発生するまでの時間をむだ時間⁶⁾と呼び、遅れ時間と区別する。実流域に本研究の最適化手法を適用する場合は、これら二つの遅れに関する時間を解消するために降雨を時間軸上で意図的に遅らせている。以降、降雨を遅らせる操作を降雨遅延操作と定義する。この操作は、単一のタンクでは時間遅れを表現できないことに起因する。また、降雨遅延操作は1段目タンクのみ行う。

図—3、図—4 は鵠川での解析結果である。基準点は鵠川と穂別で、流域面積はそれぞれ $1228.0(\text{km}^2)$ 、 $949.5(\text{km}^2)$ である。図—3、図—4 のタンク構成は直列三段タンクモデルであり、遅れ時間を考慮して計算を行っている。遅れ時間はそれぞれ8時間と4時間である。

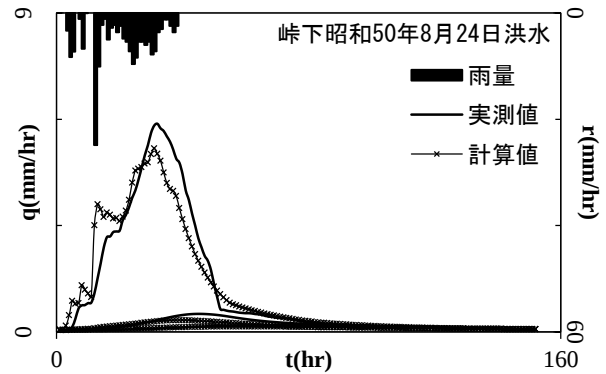
図—5 は後志利別川、大富地点での解析結果である。流域面積は $612.3(\text{km}^2)$ で、タンク構成はタンク①+②の

直列二段タンクモデルであり、むだ時間を考慮して計算を行っている。むだ時間は4時間である。また、むだ時間を考慮して計算を行うと、(14)式から、側方流出孔高さは初期貯留高と同じとなる。

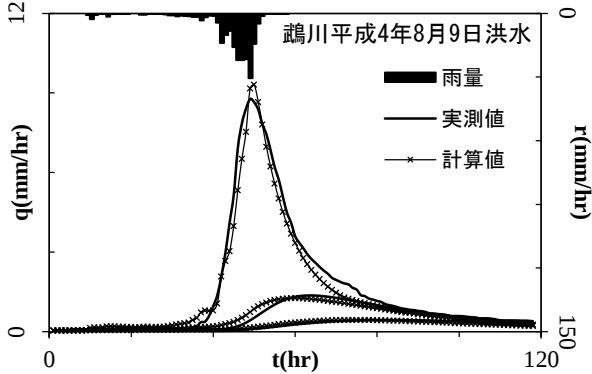
図—6、図—7 は留萌川での解析結果であり、基準点は幌糠と峠下である。流域面積はそれぞれ $165.9(\text{km}^2)$ 、



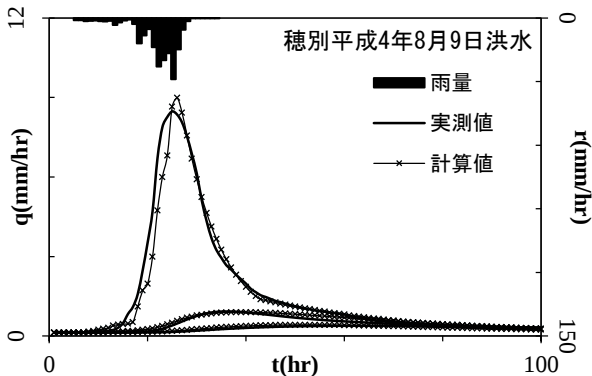
図—6 流出解析結果(幌糠地点)



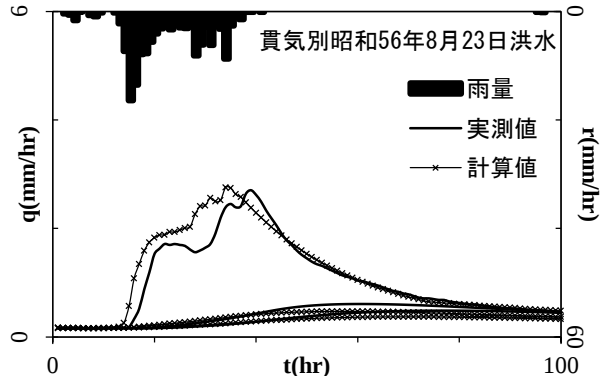
図—7 流出解析結果(峠下地点)



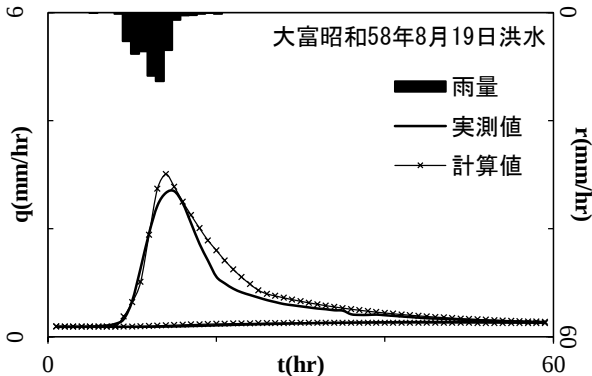
図—3 流出解析結果(鵠川地点)



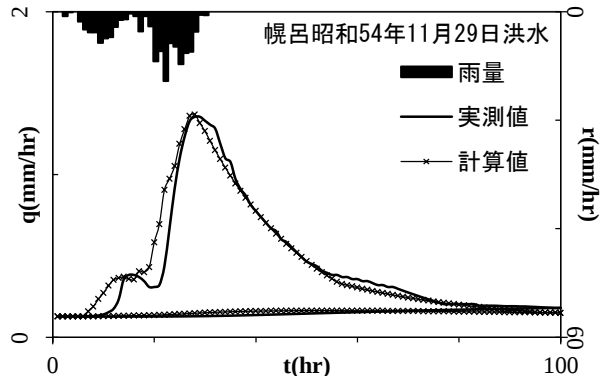
図—4 流出解析結果(穂別地点)



図—8 流出解析結果(貫気別地点)



図—5 流出解析結果(大富地点)



図—9 流出解析結果(幌呂地点)

51.0(km²)である。図—6 はタンク①+②、図—7 は直列三段タンクモデルの構成であり、図—6、図—7 共にむだ時間を考慮して計算を行っている。むだ時間はそれぞれ2時間と1時間である。

図—8 は沙流川水系額平川、貫気別地点での解析結果である。流域面積は 365.8(km²)、タンク構成は直列三段タンクモデルである。図—9 は釧路川水系幌呂川、幌呂地点での解析結果であり、流域面積は 127.0(km²)、タンク構成はタンク①+②である。また、図—8、図—9 では降雨遅延操作は行っていない。

図—3 から図—9 の解析結果における NS は、一番小さなものでも、貫気別地点での 0.87 であり、他の地点における NS は全て 0.9 以上である。

本研究の解析結果から、大規模な流域では遅れ時間を考慮することで、中小規模の流域ではむだ時間を考慮することで計算精度や収束性を向上することができた。このことから、降雨遅延操作は、現段階では物理的意味を明らかにすることはできないが、河道の伝播過程を考慮したものと考えられる。また、流域によってタンク構成を変えることで計算精度を向上させることができた。具体的には、中小規模の流域においてはタンク構成が2段でも十分な精度が得られた。その場合は、1 段目はタンク②より、タンク①を対応させると良い結果になった。

中小規模の流域では、むだ時間を考慮しなくても十分な精度の解析結果を得ることができる場合があった。今後は、降雨遅延操作を行わなくてもよい流域の大きさを明らかにしていきたい。

7. 未知定数の総合化

各流域での解析結果を基に、未知定数の収束値の平均値を表—1 から表—5 に示す。平均値は計算の際の初期値として使用することも可能である。標準偏差については、データ数が十分に多くない為、ここでは省略した。

表—1 大富地点未知定数平均値

1段目タンク①		2段目タンク②	
	平均値		平均値
α_1	5.73E-02	α_3	6.69E-03
α_2	3.19E-02		
h_1	1.46E+01		
b_1	3.13E-02	b_2	8.68E-03

表—2 幌糠地点未知定数平均値

1段目タンク①		2段目タンク②	
	平均値		平均値
α_1	4.59E-02	α_3	1.51E-02
α_2	3.02E-02		
h_1	1.27E+01		
b_1	1.50E-02	b_2	9.32E-03

表—3 峠下地点未知定数平均値

1段目タンク①		2段目タンク②		3段目タンク③	
	平均値		平均値		平均値
α_1	4.34E-02	α_3	3.21E-02	α_3	1.70E-02
α_2	2.47E-02				
h_1	1.54E+01				
b_1	2.19E-02	b_2	2.71E-02	b_2	1.04E-02

表—4 貫気別地点未知定数平均値

1段目タンク①		2段目タンク②		3段目タンク③	
	平均値		平均値		平均値
α_1	3.28E-02	α_3	1.36E-02	α_3	2.17E-02
α_2	6.37E-03				
h_1	1.39E+01				
b_1	7.38E-03	b_2	2.64E-02	b_2	1.03E-02

表—5 幌呂地点未知定数平均値

1段目タンク①		2段目タンク②	
	平均値		平均値
α_1	2.47E-02	α_3	1.67E-03
α_2	1.19E-02		
h_1	4.20E+01		
b_1	2.78E-02	b_2	1.33E-02

8. 結論

- 2 種類のタンクの未知定数をニュートン法により最適化する手法を構築した。
- 未知定数を理論的に確定値とする工夫を行い、側方流出孔高さを浸透孔係数で表すことができた。
- フィルター分離 AR 法により分離した流出成分ごとに単一のタンクを対応させて流出解析を行い、良好な結果を得た。
- 降雨遅延操作は、河道の伝播過程を考慮したものと考えられる。その場合、大規模流域では遅れ時間を考慮し、中小規模ではむだ時間を考慮することで計算精度を向上できることがわかった。
- 流域によっては、直列三段タンクモデルよりも直列二段タンクモデルの方が良い精度となる場合があった。このことから、流域ごとにタンクの構成を変えることで流出解析精度を改善できることがわかった。
- 中小規模の流域では、むだ時間を考慮しなくても十分な精度となる場合があった。今後は、降雨遅延操作を行わなくてもよい流域の大きさを明らかにしていきたい。
- 流域ごとの解析結果から、同定された未知定数の平均値を求めた。その結果から、計算例を増やすことで、未知定数の総合化の可能性が示唆された。

9. 参考文献

- 嵯峨浩、亀山初基：タンクモデル未知定数の数学的最適化手法について、土木学会北海道支部論文報告集第 68 号、B-18、2011。
- 亀山初基、嵯峨浩、柳屋圭吾：流出成分に対応した単一タンクモデルの未知定数推定法、水文・水資源学会 2012 年度研究発表会要旨集、pp.230-231、2012。
- 日野幹雄、長谷部正彦：水文流出解析、森北出版、1985。
- 北海道開発局開発土木研究所、若手水文学研究会：現場のための水文学、1994。
- 嵯峨浩：流出解析モデルと計算手法、第 40 回水工学に関する夏期研修会講義集、pp.A-1-1-A-1-20、2004。
- 嵯峨浩：周波数応答法による流出解析、土木学会論文集、No.393/II-9、pp.77-86、1988。