Ｂ－１４　平成24年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第69号

水位流量曲線の最適化に関する研究

A Study on Optimization of　Waterl-evel‐Discharge Curve

北海学園大学社会環境工学科　○フェロー　許士　達広 (Tatsuhiro Kyoshi)
北海学園大学社会環境工学科　酒田　大生 (Daiki Sakata)
北海学園大学社会環境工学科　小西　俊 (Shun Konishi)

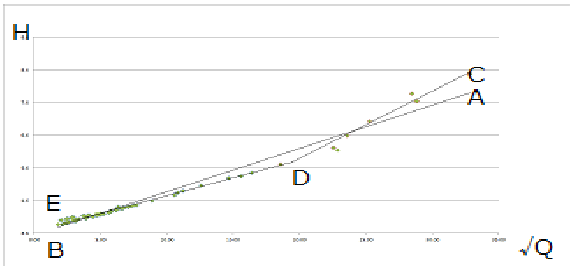
1. はじめに

河川の水位流量観測は通常水位のみが水位計により自動観測されており、流量への換算は各観測所における水位流量曲線(H‐Q 曲線)により行われる。水位流量曲線は年間 36 回、または 24 回程度実施される流量観測の 2 ヵ年分の資料を用いて算出され、通常 1)式のように 2 次曲線式で表され、2)式のように直線化して折れ線として検討されている。

$$Q = a(H+b)^2 \quad \cdots 1)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{Q} - b \quad \cdots 2)$$

年間の流量観測において、測定される水位Hと流量Qを H と $\sqrt{Q}$のグラフにプロットし、それに折れ線(直線の組み合わせ)を当てはめ、各直線について最小自乗法で$\sqrt{a}, b$を定める。一般的にはそれぞれの折れ線における直線の相関係数がそれぞれ 0.8 以上になれば良いということになっているが、例えば図-1 において、AB のように引くのか CDE のように引くのか比較した場合、細かく分けたほうが当然相関係数が高くなり一見適合度が良くなる。細かく分けるほど相関は上がっていくが、極端に言えば 2 点ずつ繋げば、相関係数は 1 であり、最小自乗法の近似の線としての意味を持たなくなる。現在 H-Q 曲線は、担当者の考え方により細かく区分されたものや 1 本のみでつながっているものが存在し、どのようにするのが正しいかについて決めるルールが無いのが実態である。



図—1　折れ線による違適合度の違い

2．AIC の適用

どのように分けるのが最適かについては以下に示す AIC(赤池情報量基準)の適用が考えられる。これは

AIC ＝ －２＊(モデルの最大対数尤度)＋2×(モデルの自由パラメータ数)　・・・2）

で表され、AIC を最小にするモデルが最適である。すなわち最尤法による最大対数尤度で判断するのではなく、それにパラメータの数の 2 倍を加えたものが最小になるように定めるのであり、最大対数尤度が同程度であれば、パラメータ数が最も少ないものを選び、節約の原理の一つの具現化となっている。回帰モデルに対しては誤差が正規分布すると仮定して AIC は以下のようになる。

$$AIC = n\log 2\pi + n\log\sigma^2 + n + 2k \quad \cdots 3)$$

モデル比較のためには定数部分を無視して

$$AIC = n\log\sigma^2 + 2k \quad \cdots 4)$$

σ^2：誤差分散　$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$

n：データ数　Y_i　：データ値、

$\hat{Y}_i$：回帰直線または曲線による推定値

ここでの log は自然対数である。2k をバイアス補正項と呼び k は式に含まれるパラメータ数で、例えば直線では２，２次曲線では３である。

またはＡＩＣはデータ数が少ないときには誤差が生ずるため、

$$AIC = n\log\sigma^2 + n\log\left(\frac{n+k}{n-k}\right) \quad \cdots 5)$$

$$\approx n\log\sigma^2 + \frac{2nk}{n-k} \quad \cdots 6)$$

を用いる。6)の形で用いられることもあるが、ここでは、5)式の形とし、これをここでは修正 AIC と呼ぶことにする。

3．折れ線の最適分割

この水位流量の関係式として 2）式のような折れ線を用いる場合は、AIC の適用を以下のように考える。

n 個のデータに対しｐ本の折れ線を当てはめる場合の誤差の尤度関数Ｌは、折れ線の境目における、下からのデータ個数をｍ1、ｍ2、・・・m(ｐ-1)、各直線の定数を$a_1, c_1 \cdots a_p, c_p$　とすると

$$L = \prod_{i=1}^{m1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - a_1x_i - c_1\right)^2\right\}$$

$$* \prod_{i=m1+1}^{m2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - a_2x_i - c_2\right)^2\right\}$$

$$* \cdots\cdots * \prod_{i=m(p-1)+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - a_px_i - c_p\right)^2\right\} \quad \cdots 7)$$

この対数をとると最大対数尤度 LL は

$$LL=\log L=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m1}\left(y_i-a_1x_i-c_1\right)^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=m1+1}^{m2}\left(y_i-a_2x_i-c_2\right)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=m(k-1)+1}^{mk}\left(y_i-a_kx_i-c_k\right)^2$$

$$\cdots\cdots-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=m(p-1)+1}^{n}\left(y_i-a_px_i-c_p\right)^2$$

この最小化のために係数を定めると例えば

$$\frac{\partial LL}{\partial a_k}=\frac{\partial}{\partial a_k}\sum_{i=m(k-1)+1}^{mk}\left(y_i-a_kx_i-c_k\right)^2=0$$

$$\frac{\partial LL}{\partial c_k}=\frac{\partial}{\partial c_k}\sum_{i=m(k-1)+1}^{mk}\left(y_i-a_kx_i-c_k\right)^2=0$$

といったように、それぞれの直線においてデータとの差が最小になるように、最小自乗法を用いればよいことになる。問題は折れ線の境目（折れ点）m1、m2、・・・m(p -1)であり、これは仮定してそれぞれの直線の AIC を算出し、その合計が最小になるように決定すればよい。すなわち

$$AIC=Minimun\quad\left(AIC_1+AIC_2+\cdots+AIC_k+AIC_p\right)$$

AIC_k（k＝１･･･p）はそれぞれの折れ線の AIC である。点を直接繋がない場合の折れ線の折れ点の位置については数学的理論は無く、トライアルで AIC が最小になるように折れ線の組み合わせを考えなければならない。組み合わせ数は膨大な数になるため、人間の目で見た判断を活用して組み合わせを絞り込む必要がある。

これは従来から H-Q 線を決定する時に行われていることの応用であり、データを標高によって折れ線に分けるときには、横断面図における地形変化点付近(高水敷と低水路の境界など)に境目が存在し、さらに河床の最深部(水深ゼロ点)、死水域の存在などに注意する。

データは年間の期別にも分離される。出水による河床変動が生ずるため、1 月から春季出水まで、春季出水から秋季出水まで、秋期出水から 12 月までといった期間別に水位流量曲線を変化させることがある。それ以外にも大出水の後や、河川工事の前後で別の曲線にすることが多い。例えば 1 年間を 2 つの期別に分離すると、それぞれの期別水位流量曲線と期別観測値の誤差は小さくなるが、パラメータ数は年間を区分しない場合の 2 倍になり、ＡＩＣで考えれば精度が下がる可能性がある。

直線の境目にあるデータを両方の直線に使うことにより、2 つの直線のつながりを良くすることは現実的に行われている。ただし AIC の算出では 2 重に計算しないように注意が必要である。

4. 適用例

対象観測点の水位流量曲線は、以下のように標高 5.8 m を境に曲線Ⅰ＋Ⅲと曲線Ⅱに分かれ、さらには期別 1～8 月と 9～12 月で曲線ⅠとⅢ分かれている。3 本の線を全体あるいは部分的に統合した場合と 3 本別々な場合の AIC を比較し、曲線の区分の妥当性を検証する。

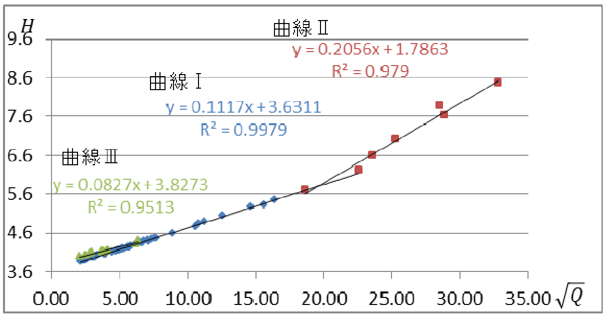


図 - 1　case1　曲線Ⅰ＋曲線Ⅱ＋曲線Ⅲ

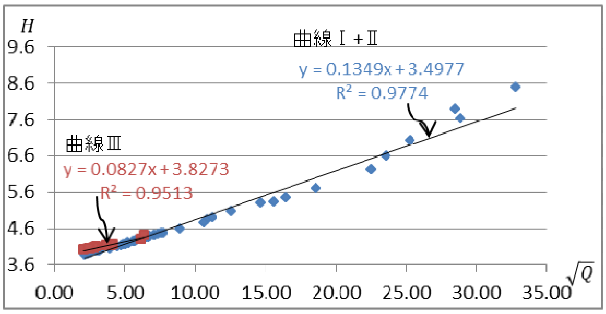


図 - 2　case　2　曲線Ⅰ+Ⅱ、曲線Ⅲ

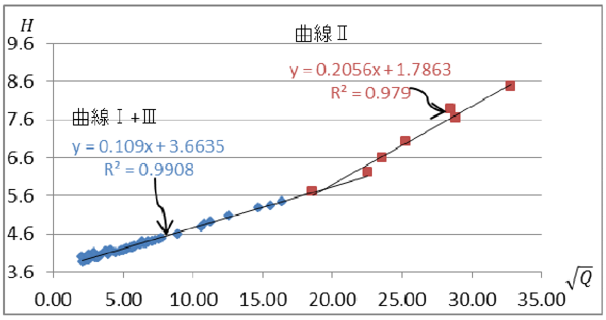
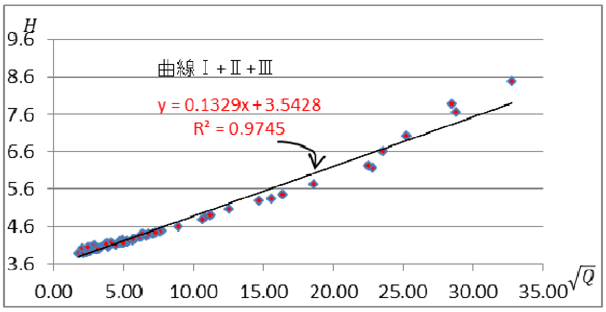


図 - 3　case3　曲線Ⅰ+Ⅲ，曲線Ⅱ



図ー4　case４　曲線Ⅰ＋Ⅱ＋Ⅲ

AIC は以下のようにまとめられる。ただし、表中の（）内はまとめてデータを一本化する部分である。これによれば case1 の 3 本別々のほうが AIC 最小となり、3 本の折れ線分離が妥当性を持つことが分かる。

表１　AIC 比較表

case	線組合せ	K 合計	AIC	修正 AIC
1	Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ	6	-523.01	-522.86
2	(Ⅰ+Ⅱ)+Ⅲ	4	-316.42	-316.38
3	(Ⅰ+Ⅲ)+Ⅱ	4	-441.51	-441.39
4	(Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ)	2	-293.31	-289.31

参考文献
坂本慶行他：情報量統計学 p 127～137
小西貞則他：情報量基準　p 180～183