

完全球状シェルにおける非軸対称座屈モードの発現予測

Prediction for the appearance of non-axisymmetric buckling modes in complete spherical shells

北海道大学大学院工学院 ○学生員 関澤貴史 (Takafumi Sekizawa)
 北海道大学大学院工学院 学生員 小西善晃 (Yoshiteru Konishi)
 北海道大学大学院工学研究院 正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

完全球状シェルはその優れた構造特性から、工業製品、建築物などの人工物はもちろんのこと、野菜や果物の果実など、自然界においても非常に多く存在する汎用性の高い構造形式である。また、近年ではグラファイトの層を重ね合わせたカーボンオニオンのようなナノ材料も注目を集め、多くの基礎的な研究が行われている。これらの構造物にかかる荷重が臨界点に達すると構造の状態は座屈後平衡状態へと移行するが、内部または外部に弾性媒質を有するなどの特殊な抵抗力が働く構造を持つシェルについては、復元力など様々な要因により座屈変形モードが特異なものとなることが予想される。既往の研究では半径方向に抵抗力を限定したばねを有する完全球状シェルのモデルを用いた結果、軸対称の座屈変形形状のみが発現した。本研究では非軸対称の座屈変形についても表現できるモデルとして、全方向に抵抗力を持つ弾性媒質を有する球状シェルを想定し、座屈時にシェルがどのような変形を起こすのかについて変分原理に基づいて解析を行った。またシェルの剛性、内部弾性媒質の抵抗力など、諸条件の差異が座屈時の挙動に与える影響に関しても検証した。

2. 解析モデル

図-1 は本研究における完全球状シェルの解析モデルを示したものである。 p は外圧力を表し等方的に作用するものとする。 a , h , E , ν はそれぞれシェルの半径、厚さ、ヤング係数、ポアソン比を示す。 u , v , w はそれぞれ θ 方向、 ϕ 方向、半径方向のシェルの変位を表す。またシェル内部は弾性媒質で満たされているものとし、 E_c , ν_c , k_f はそれぞれ弾性媒質のヤング係数、ポアソン比、ばね剛性を示す。

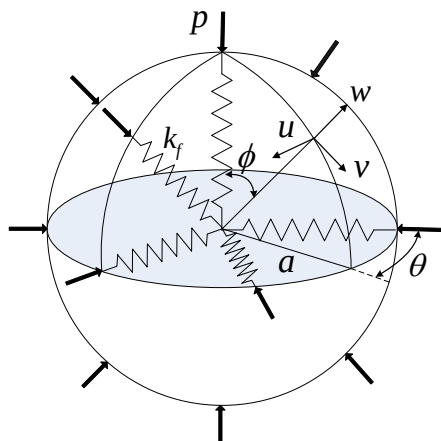


図-1 完全球状シェルモデル

3. 変分原理による解析理論

本研究では以下の様な変分原理に基づいた理論を用いて解析を進める。

構造物に関して、ある変位 x_0 が生じた時の力学的エネルギーの変化量は以下のように表される。

$$\Delta U = U(x_0 + x_1) - U(x_0) \quad (1)$$

この式をテイラー展開すると式(2)が得られる。

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U + \frac{1}{3!} \delta^3 U + \dots \quad (2)$$

本研究で考慮する座屈状態において、力学的エネルギーは不安定状態にある。即ち、座屈状態では力学的エネルギーが最小値をとる安定状態になりえないため、その一次導関数が0かつ二次導関数が負の値をとらない。よって座屈時には以下の条件が適用できる。

$$U''(x_0) \geq 0 \quad (3)$$

座屈状態における力学的エネルギーの条件は式(4)のように表され、これに基づき完全球状シェルの座屈挙動を解析する。

$$\delta(\delta^2 U) = 0 \quad (4)$$

4. 定式化

4.1 完全球状シェルの定式化

本解析モデルにおける完全球状シェルの全ポテンシャルエネルギーは以下のように表される。

$$U = U_M + U_B + \Omega + U_F \quad (5)$$

ここで、 U_M , U_B , Ω , U_F は伸びによるひずみエネルギー、曲げによるひずみエネルギー、外圧力による仕事、弾性媒質が蓄えるエネルギーを表し、それぞれ以下の式(6) - (9)によって与えられる。

$$U_M = \frac{C}{2} \int_A \left(\varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_\phi\varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\phi\theta}^2 \right) dA \quad (6)$$

$$U_B = \frac{D}{2} \int_A \left(\chi_\phi^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu\chi_\phi\chi_\theta + 2(1-\nu)\chi_{\phi\theta}^2 \right) dA \quad (7)$$

$$\Omega = - \int_A p w dA \quad (8)$$

$$U_F = \frac{k_f}{2} \int_A w^2 dA \quad (9)$$

ここにおいて ε , γ , χ はそれぞれ伸び、せん断、曲げに関するひずみであり C , D はそれぞれ伸び、曲げ剛性に関する係数を表す。

上記より得られたエネルギーに変分原理を適用することによって座屈現象に対応する支配方程式を得ることができる¹⁾。その支配方程式に対し、座屈後の変位を座屈形状の波数 n , m を用いて表し、固有値を解くことによって弾性座屈荷重と座屈変形後の変位を求める²⁾。

4.2 内部弾性媒質におけるばね剛性の定式化

エネルギー式において、シェルが内部に弾性媒質を有するモデルを想定し、半径方向のみではなく全方向の力から影響を受ける弾性媒質のばね剛性 k_f を表現していく。

k_f を導出するために、まず内部に弾性媒質を有するシェルの変位式は以下のように表すことができる。

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} C_{11}^{(nm)} r^{n+1} V_{nm} + C_{21}^{(nm)} r^n X_{nm} + \left[\frac{2n+3}{2} \frac{B_{(n)}}{C_{(n)}} C_{11}^{(nm)} r^{n+1} + C_{32}^{(nm)} r^{n-1} \right] W_{nm} \quad (10)$$

式(10)におけるベクトル関数 V_{nm} , X_{nm} , W_{nm} は以下のように表現される。

$$V_{nm} = \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} Y_n^m e_r + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_{\theta} + \frac{im}{\sqrt{(n+1)(2n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_{\phi} \quad (11)$$

$$X_{nm} = -\frac{m}{\sqrt{n(n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_{\theta} - \frac{i}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_{\phi} \quad (12)$$

$$W_{nm} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} Y_n^m e_r + \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_{\theta} + \frac{im}{\sqrt{n(2n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_{\phi} \quad (13)$$

ここにおける Y_n^m は球面調和関数であり、ルジャンドル陪関数を含む関数形で表現される。また、 Y_n^m は三次元ラプラス方程式の解を球座標系において表示したときの角度部分の関数を表している。また式(10)において $C_{ij}^{(nm)}$ は座屈波数 m , n に関する定数であり、 $B_{(n)}$ と $C_{(n)}$ については以下のように表される。

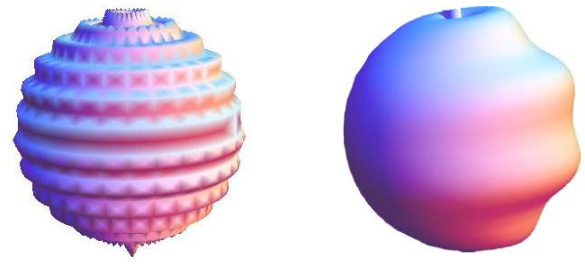
$$B_{(n)} = \frac{(\lambda + \mu) \sqrt{n(n+1)}}{2n+1}, \quad C_{(n)} = \frac{n\lambda + \mu(3n+1)}{2n+1} \quad (14)$$

ここにおいて λ , μ はラメ定数であり、弾性媒質のヤング係数 E_c とポアソン比 ν_c からなるパラメータである。また、弾性媒質に関する応力式は以下のように表現できる³⁾。

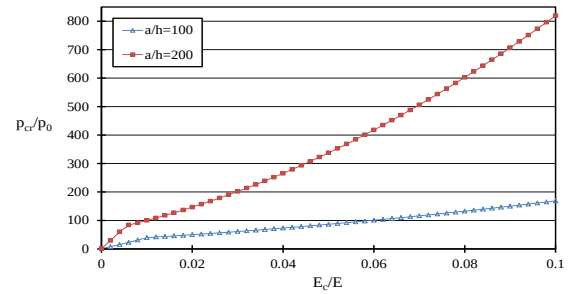
$$\frac{\sigma_{rr}^{(nm)}}{2G} = \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \frac{(n+1)(mn^2 - mn - 2m - 2)}{2[m(3n+1) - 2(2n+1)]} C_{11}^{(nm)} r^n Y_n^m + \frac{n(n-1)}{\sqrt{n(2n+1)}} C_{32}^{(nm)} r^{n-2} Y_n^m \quad (15)$$

式(15)における G はせん断弾性係数を表す。一般的な形で表現されるこれらの式に対して本解析モデルへの適用条件として変位式に r 方向のみ1単位の変位が生じると仮定する。それにより $C_{ij}^{(nm)}$ を求め、応力式に適用することで弾性媒質の挙動を想定したばね剛性 k_f が以下のように算定される。

$$k_f = \left[\frac{(1+n)(-2-2m-mn+m^2n)}{-2+m(1+3n)} + \frac{\sqrt{n(n-1)}(2\sqrt{n}C_{(n)} + \sqrt{n+1}(3+2n)B_{(n)})}{(2n+1)C_{(n)}} \right] \frac{G}{r} \quad (16)$$



図—2 軸対称座屈モードと非軸対称座屈モードの比較



図—3 剛性比と厚肉比に対する座屈荷重比

5. 解析結果

図—2 はシェルの座屈モードを示したものである。ばね剛性が半径方向に限定されていた場合では軸対称変形が生じたが、波数依存性を持つ弾性媒質を内部に有する場合は非軸対称座屈モードが発現し得ることがわかった。

図—3 の座屈荷重比は、算出された座屈荷重に古典座屈荷重式 P_0 の逆数を乗じて無次元化したものである⁴⁾。これより、厚肉比と剛性比の増加に伴い座屈荷重比も大きな値をとる。

6. まとめ

本研究から以下の知見が得られた。

- 弾性媒質のばね剛性を半径方向に限定した場合と比較して、波数依存性を持たせた場合においては球状シェルの座屈モードが θ 方向において $m=1$ となる非軸対称変形が発現しうる。
- 球状シェルの座屈荷重は剛性比と厚肉比に依存し、それぞれが大きいほど座屈荷重も大きな値をとる。

謝辞

本研究の実施に際し、山梨大学生命環境学部・島弘幸准教授から貴重なご助言をいただきました。この場をお借りして御礼申し上げます。

参考文献

- 1) M.Sato, M.A.Wadee, T.Sekizawa, K.Iiboshi, and H. Shima: Hydrostatically pressurized buckling of complete spherical shells filled with an elastic medium, 土木学会論文集 A2 (応用力学) Vol.67,
- 2) W.Flugge,: Stress in shells Second Edition, Springer-Verlag, Berlin(1962). No.2, I_15-I_22,2011.
- 3) H. B. McClung: The elastic sphere under nonsymmetric loading, Journal of Elasticity 21: 1-26, 1989
- 4) S.P. Timoshenko, and J.M. Gere,: Theory of Elastic Stability, 2nd Edition McGraw-Hill(1962), 512-517