

リング補剛円筒シェルにおける補剛効果に関する構造力学的検証

Effect of ring stiffeners on mechanical properties of cylindrical shells

北海道大学工学部

○学生員 渡邊和英 (Kazuhide Watanabe)

北海道大学大学院工学研究院

正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

土木工学を始め広く工学の分野において用いられる円筒シェル構造では、その構造特性から円筒シェル軸方向に離散的にリング補剛を施すことで剛性を高めることが多い。この補剛効果はリング、シェルの剛性やリング配置間隔により大きく変化することとなるが、構造力学的に陽な形でその効果が明確になってはいない。

本研究では無補剛円筒シェルの支配微分方程式とリング補剛円筒シェルの支配差分方程式より得られるたわみ解の相似性から、リング補剛の効果を検証することを目的とする。

2. 解析モデル

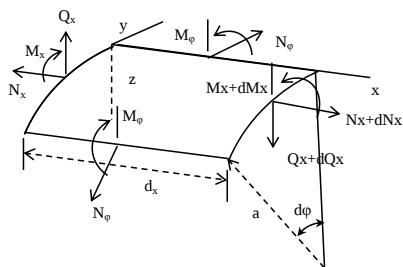


図1 微小区間に生ずる力

図1は円筒シェルにおける微小区間に作用する内力の関係を示している。これらの力の釣り合いにより、シェルの半径方向に生ずる変位を導出することが出来、外力が作用しない時の支配方程式は次の様に表される¹⁾。

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{EhW}{a^2} = 0 \quad (1)$$

このとき W はシェルの半径方向の変位、 h はシェルの厚さ、 D はシェルの曲げ剛性を表す。(1)の微分方程式より W は(2)式で表される。

$$W = e^{\frac{\beta x}{b}} \left(C_1 \cos \frac{\beta x}{b} + C_2 \sin \frac{\beta x}{b} \right) + e^{-\frac{\beta x}{b}} \left(C_3 \cos \frac{\beta x}{b} + C_4 \sin \frac{\beta x}{b} \right) \quad (2)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3b^4(1-\nu^2)}{a^2 h^2}}$$

β は円筒シェルの形状と材料特性に関するパラメータである。本研究では式(2)を基にし、リング補剛シェルの変形式を導く。

3. 定式化

3.1 リングとシェル間に生ずる断面力の導出

次に(2)式を基に、リング補剛円筒シェルの支配方程式を導出する。ある任意の点 r に存在するリングのたわみを W_r とすると、図2より次の式が得られる。

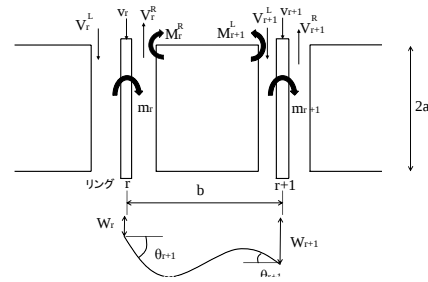


図2 リングとシェル間における力の釣り合い

$$x=0 \text{ のとき } W=W_r, \quad \frac{dW}{dx} = \theta_r$$

$$-D \frac{d^2 W}{dx^2} = M_r^R, \quad -D \frac{d^3 W}{dx^3} = V_r^R \quad (3)$$

$$x=b \text{ のとき } W=W_{r+1}, \quad \frac{dW}{dx} = \theta_{r+1}$$

$$-D \frac{d^2 W}{dx^2} = M_{r+1}^L, \quad -D \frac{d^3 W}{dx^3} = V_{r+1}^L \quad (4)$$

(2)式を(3)、(4)式に代入して未定係数 $C_1 \sim C_4$ を求め、曲げモーメント M 及びせん断力 V を変位 W 及びたわみ角 θ で表すと次の関係式が得られる。

$$M_r^R = \frac{2D}{b} (d_1 \theta_r + d_2 \theta_{r+1} + \frac{1}{b} (d_3 W_r + d_4 W_{r+1}))$$

$$M_{r+1}^L = \frac{2D}{b} (-d_2 \theta_r - d_1 \theta_{r+1} + \frac{1}{b} (d_4 W_r + d_3 W_{r+1}))$$

$$V_r^R = \frac{2D}{b^2} (d_5 \theta_r + d_4 \theta_{r+1} + \frac{1}{b} (d_6 W_r + d_7 W_{r+1}))$$

$$V_{r+1}^L = \frac{2D}{b^2} (d_4 \theta_r + d_5 \theta_{r+1} - \frac{1}{b} (d_7 W_r + d_6 W_{r+1})) \quad (5)$$

$$d_1 = \frac{2\beta(\cosh \beta \sin \beta - \cos \beta \sinh \beta)}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2}$$

$$d_2 = \frac{\beta(\sinh 2\beta - \sin 2\beta)}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2}$$

$$d_3 = -\beta^2 \frac{4\sin \beta \sinh \beta}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2}$$

$$d_4 = \beta^2 \left(1 + \frac{4\sin^2 \beta}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2} \right)$$

$$d_5 = \frac{\beta^2 (\cos 2\beta - \cosh 2\beta)}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2}$$

$$d_6 = \frac{4\beta^3 (\cosh \beta \sin \beta + \cos \beta \sinh \beta)}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2}$$

$$d_7 = -\frac{2\beta^3 (\sin 2\beta + \sinh 2\beta)}{\cosh 2\beta + \cos 2\beta - 2} \quad (6)$$

3.2 力のつり合いによる r 点のたわみの導出

先程求めた式(5)、(6)を用いて力のつり合いより、リングに作用する半径方向の力 V_r と曲げモーメント m_r を導く。外力が作用してないので断面力のつり合いより、

$$V_r^R - V_r^L = v_r, \quad M_r^L - M_r^R = m_r \quad (7)$$

(7)式の様に表すことが出来、また、荷重とたわみ、曲げモーメントとたわみ角の関係より、(8)式が求まる²⁾。

$$v_r = \frac{EA}{a^2} W_r, \quad m_r = \frac{EI}{a^2} \theta_r \quad (8)$$

式(7)、(8)に式(5)を代入すると、次式が求まる。

$$d_4(\theta_{r+1} - \theta_{r-1}) + \frac{2W_r}{b}(d_6 - \mu) + \frac{d_7}{b}(W_{r+1} + W_{r-1}) = 0$$

$$\mu = \frac{EA}{4Da^2} b^3 \quad (9)$$

$$2\theta_r(d_1 + \lambda) + d_2(\theta_{r+1} + \theta_{r-1}) + \frac{d_4}{b}(W_{r+1} - W_{r-1}) = 0$$

$$\lambda = \frac{EI}{4Da^2} b \quad (10)$$

ここで、 μ はリングの半径方向に作用する力に対するパラメーターで、 λ は曲げモーメントに対するパラメーターである。また、式(9)、(10)の θ_r を消去し、 W_r について整理すると次の方程式が得られる。

$$\frac{1}{b} \left\{ \frac{2(d_4 - \mu) + d_4(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{-1})}{d_4(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{-1})} - \frac{d_4(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{-1})}{2(d_1 + \lambda) + d_2(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{-1})} \right\} W_r = 0 \quad (11)$$

$\mathbf{E}$ は Shifting operator と呼ばれ、有限な要素において、ある任意の点から次の点に移動させる機能を持つ³⁾。ここで、 $W_r = e^\phi$ と置くと、式(11)は ϕ の関数で表すことが出来る。

$$\frac{2(d_6 - \mu) + 2d_7 \cosh \phi}{2d_4 \sinh \phi} - \frac{2d_4 \sinh \phi}{2(d_1 + \lambda) + 2d_2 \cosh \phi} = 0$$

$$A \cosh^2 \phi + B \cosh \phi + C = 0$$

$$A = d_2 d_7 - d_4^2$$

$$B = d_2(d_6 - \mu) + d_7(d_1 + \lambda) \quad (12)$$

$$C = (d_1 + \lambda)(d_6 - \mu) + d_4^2$$

さらに、求めたい解を $\phi_D = \pm(\alpha_D \pm \beta_D i)$ と置くと、 r 点におけるたわみの式は次の様になる。

$$W_r = e^{\alpha_D r} (B_1 \cos \beta_D r + B_2 \sin \beta_D r) + e^{-\alpha_D r} (B_3 \cos \beta_D r + B_4 \sin \beta_D r)$$

$$\alpha_D = \cosh^{-1} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{A-B+C}{A}} + \sqrt{\frac{A+B+C}{A}} \right)$$

$$\beta_D = \cos^{-1} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{A-B+C}{A}} - \sqrt{\frac{A+B+C}{A}} \right) \quad (13)$$

ここで α_D と β_D はリングの影響がない場合、つまり μ と λ が限りなく0に近づく時、 $\alpha_D = \beta_D$ となり、式(2)と一致すると予想される。

4. 解析結果

式(10)の μ と λ について、図3より断面二次モーメントと面積を求めると図3のようになる。

$$\mu = \frac{E_0 A}{4Da^2} b^3 = \frac{E_0 b_0 h_0}{4Da^2}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\therefore \mu = \frac{3b_0 h_0 b^3 E_0 (1-\nu^2)}{E h^3 a^2} = \frac{3b_0 h_0 b^3 (1-\nu^2)}{h^3 a^2} \frac{E_0}{E} \quad (14)$$

同様に、

$$\lambda = \frac{E_0 I}{4Da^2} b = \frac{3bE_0}{12} \frac{h_0 b_0^3 (1-\nu^2)}{a^2 h^3} = \frac{E_0}{E} \frac{b_0^3 h_0 b (1-\nu^2)}{4a^2 h^2} = \mu \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \left(\frac{b_0}{b}\right)^2 \quad (15)$$

ここで、 $b_0 \ll b$ であることから $(b_0/b)^2 \cong 0$ となるので、 λ もまた0に近似される。従って、リングのパラメーターは μ のみに決まる。これは弾性支持された梁の場合と同様であることを意味する⁴⁾。

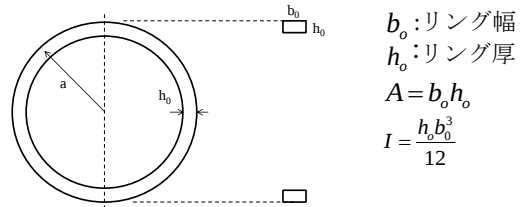


図3 リングの断面

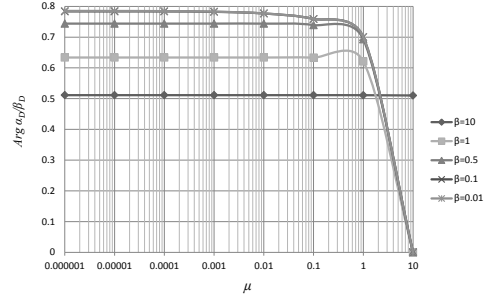


図4 リング及びシェルのパラメーターと

偏角 α_D / β_D の関係

以上の結果を基に、 μ と偏角 α_D / β_D の関係をグラフに表したのが図4である。グラフより、 $\beta < 0.5$ の時に偏角 α_D / β_D は $\pi/4$ に収束する結果になった。しかし、 β が増加すると μ が0に近づいても $\pi/4$ には収束しない。これは β がリングの間隔 b に比例し、シェルの厚さ h と半径 a に反比例するからだと考えられる。つまり、 β が大きい事は、シェルが薄く、長いことになる。よって、リングの影響がより局所的になるので、連続的な式(2)の様に見なすことが出来ないのである。

5. まとめ

本研究から以下の知見を得られた。

- ・ r 点でのリングのたわみは、リングのパラメーター μ とシェルのパラメーター β によって決定される。
- ・グラフより、 $\beta > 0.5$ で α_D と β_D は発散し、リングの剛性に依らず、リングの影響は局所的になる。
- ・今後は今回の結果を使い、実際に荷重が作用する場合を想定し、リング補剛円筒シェルと無補剛円筒シェルのたわみを求めて、リングの影響やその範囲を検証する。

謝辞

本研究は JSPS 科研費挑戦的萌芽研究（課題番号：24651183、研究代表者：佐藤太裕）の助成を受け実施したものです。関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) S. Timoshenko : The Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Publishing Company; International ed of 2nd revised ed(1964)
- 2) S. Timoshenko and D.H. Young : Vibration problems in Engineering, D. Van Nostrand Company(1962)
- 3) Thein Wah and Lee R. Calcote : Structural Analysis by Finite Difference Calculus, Van Nostrand Reinhold Company(1970)
- 4) M. Sato, S. Kanie, T. Mikami : Material analogy of a beam on elastic supports as a beam on elastic foundation, Applied Mathematical Modelling, Vol.32 (2008), pp.688-699