

弾性拘束された線状構造の収縮による螺旋座屈形態の解析的検討

Helical Buckling of Slender Structures Surrounded by an Elastic Medium

北海道大学工学部
山梨大学大学院医学工学総合研究部
北海道大学大学院工学研究院

○学生員 原澤祥典 (Shosuke Harasawa)
島弘幸 (Hiroyuki Shima)
正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

梁が軸方向に収縮を起こすことによって生じる荷重によって、梁に曲げ座屈を生じることは一般的に広く知られているところであるが、曲げ部材が拘束を受ける場合諸条件によりその座屈形態が単なる湾曲ではなく螺旋形状をとることがある^{1),2)}。本研究では、弾性拘束されている線状構造が軸方向に一樣に収縮される場合の座屈形態に着目し、そのモードが三次元的な螺旋形態をとる可能性およびその特性を構造力学的に検証することを目的とする。

2. 解析モデル

図1は解析対象とする三次元螺旋座屈モデルである。モデル化に際しては構造中心部に線状構造を有し、その外側に軟質である内層部分と、硬質であり剛体とみなせる外層部分の三重構造モデルを仮定している。本モデルでは中心部の線状構造体が、内層及び外層部分の均一な収縮によって圧縮力を受けることにより、3次元的に螺旋座屈を生じる状態を想定している。そこで、その形状を記述するパラメータを関数としながら仮想変位による力学的歪エネルギーを最小化する条件により螺旋座屈形状を決定する。

軸方向に均一な収縮を仮定し、外層部分が円筒形状を保ったまま収縮歪 ϵ だけ生じた時に、中央部分が内層内で図1に示す通りの螺旋を発生させるものとする。ここで b は螺旋の半径、 a は内層の直径、 s は螺旋のピッチである。また、中央部の直径を d としている。

3. 螺旋座屈モデル

本モデルでは図1で示した通り、中央部分とそれを包む内層、外層に分かれた構造を有している。そして物理的に実現可能な螺旋のパラメータは、中央部全体に発生する歪エネルギーが最小になる場合として決定できる。この時、中央部に関する力学系の歪エネルギーは(1)中央部分に作用する軸方向圧縮歪エネルギー E_{strain} 、(2)中央部分の撓み歪エネルギー E_{bend} 、(3)内層部分の弾性歪エネルギー $E_{elastic}$ 、の三つの総和によって決定される。なお、外層部分の弾性歪エネルギーは、外層部分は硬質で剛体とみなせるため、計算結果に影響を及ぼさないと除外している。ここで始めに、中央部分の軸方向圧縮歪エネルギーに関して、中央部分に対して内層、外層部分が軸方向に収縮歪 ϵ だけ生じる場合を考える。この時、中央部は軸方向に初期長から螺旋形状長に圧縮されるので、圧縮歪エネルギーを発生している。従って、ここで中央部は弾性変形するので単位長あたりの歪エネルギー E_{strain} は次式で表される。

$$E_{strain} = \frac{1}{2} E_g S_g \left[1 - (1 - \epsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi b}{s} \right)^2} \right]^2 \quad (1)$$

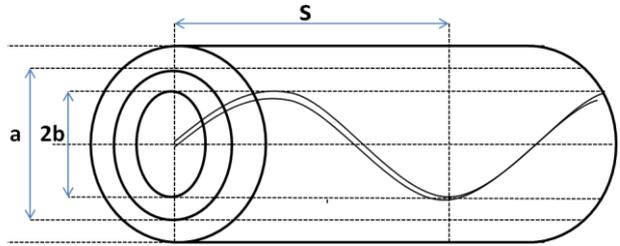


図1 3次元螺旋座屈モデル

ただし E_g は中央部分のヤング率、 S_g は中央部分の断面積、 d は中央部分の直径、 ϵ は外層部分の収縮率である。また b は螺旋の半径、 s は螺旋のピッチである。

次に中央部分の撓み歪エネルギーを求める。螺旋座屈した中央部分は次式(2)で与えられるような、全長に亘って均一な曲率半径 R を有する。

$$R = b \left[1 + \left(\frac{s}{2\pi b} \right)^2 \right] \quad (2)$$

この時、中央部分には次式で与えられる撓み歪エネルギー E_{bend} を単位長に生じる。

$$E_{bend} = \frac{1}{2} E_g I_g \frac{1}{b^2 \left[1 + \left(\frac{s}{2\pi b} \right)^2 \right]^2} \quad (3)$$

ただし I_g は中央部分の断面二次モーメントであり、

$$I_g = \left(\frac{\pi d^4}{64} \right)$$

である。

最後に、内層部分の歪エネルギーを求める。螺旋座屈によって中央部分は軸方向に垂直な断面内において、内層部中央から b だけ変位する。故に横断面内での内層部分の一部は圧縮され、他の一部は逆に引き伸ばされることになる。この時の変形が弾性的でありかつ全て横断面内のみで行われるものと仮定すると、この変形と等価な力学モデルとして図2に示すバネモデルとなる。この時、中央部が実際の中心より b だけ変位した時のバネの全歪エネルギー E_{coil} は、バネ定数を k とすると

$$E_{coil} = \sum \frac{1}{2} k \left[(\text{バネ初期長} - (\text{バネの変位後}) \right)^2 \quad (4)$$

で与えられる。実際の中央部は分布バネ系であるので上式を積分表示して計算を行う。単位長あたりの内層部における弾性歪エネルギー $E_{elastic}$ は(5)で与えられる。

$$E_{elastic} = k \left[\pi (b^2 + 2a_1^2) - 4a_1^2 (b + a_1) E \left(\frac{2\sqrt{ba_1}}{b + a_1} \right) \right] \quad (5)$$

ただし、

$$E(\varphi) = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \varphi^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{第2種完全楕円積分})$$

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{2a+d}{2a-d} \right) E_s$$

(内層部の円周方向単位角あたりのバネ定数)

E_s : 内層部のヤング率

$$a_1 : a - \frac{d}{2} \quad (a : \text{内層部半径})$$

である。

これら力学系の各歪エネルギーを求めたことで、その総和である全歪エネルギー E_{total} は次式の通りとなる。

$$E_{total} = \frac{\pi}{8} d^2 \left[1 - (1-\varepsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi b}{s} \right)^2} \right]^2 E_g + \frac{\pi}{128} \frac{d^4}{b^2} \left(\frac{2\pi b}{s} \right)^4 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\pi b}{s} \right)^2 \right]^2} E_g + \frac{1}{2} \left(\frac{2a+d}{2a-d} \right) \left[\pi (b^2 + 2a_1^2) - 4a_1^2 (b + a_1) \right] E \left(\frac{2\sqrt{ba_1}}{b+a_1} \right) E_s \quad (6)$$

ここで物理的に再現可能な螺旋形状パラメータ b と s はエネルギー変分の原理より

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial b} = \frac{\partial E_{total}}{\partial s} = 0 \quad (7)$$

を解くことで決定される。これが座屈形状を決定する方程式である。本研究では(7)式を直接数値計算することにより、 S 、 ε_{crit} を導出した。また、無次元量として式(8)の量を(6)式に導入した式(9)とすると以下の通りとなった。

$$S = \frac{s}{d}, \quad B = \frac{b}{d}, \quad A = \frac{a}{d}, \quad \alpha = \frac{E_s}{E_g} \quad (8)$$

$$E_{total} = \frac{\pi}{8} \left[1 - (1-\varepsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2} \right]^2 + \frac{\pi}{128} \frac{1}{B^2} \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^4 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2 \right]^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2A+1}{2A-1} \right) \left[\pi (B^2 + A_1^2) - 4A_1^2 (B + A_1) \right] E \left(\frac{2\sqrt{BA_1}}{B+A_1} \right) \alpha \quad (9)$$

本論文では、式(6)を式(7)に従って計算させた結果を検証した上で、式(9)の計算を行っている。

4. 解析結果

α 値を 1.0×10^{-4} から 1.0×10^{-2} まで変化させると共に、 S と臨界収縮歪 ε_{crit} それぞれの関数として示したものが図3と図4である。また、 ε が臨界収縮歪 ε_{crit} に達すると急激に螺旋半径 b が增大することは既に知られており³⁾、そのため螺旋半径 b を 1.0×10^{-6} とした場合の値を臨界収縮歪 ε_{crit} としている。

内部半径と中央部半径の比 A に関して[1,5,10,20,50]の五つの値を与えた結果、 A の値が増大するに従って S の値が増大する傾向がみられた。ただしその増大傾向は次第に緩やかになっている。 ε_{crit} に関しては、その値は A の値の増大に伴い減少するが、その傾向は同じく次第に緩やかなものになっていることが伺える。

全体的な傾向としてはヤング率の比 α が増大すると螺旋ピッチと中央部半径の比 S は減少する。これは内層部分のヤング率が増えると、ピッチ長 s は短くなることを

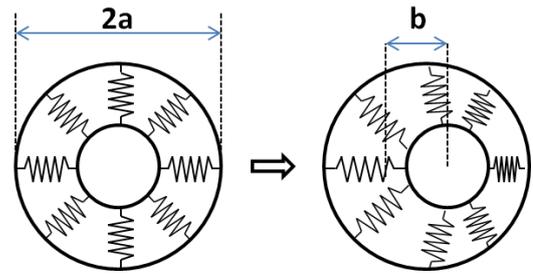


図2 内層部の等価バネモデル

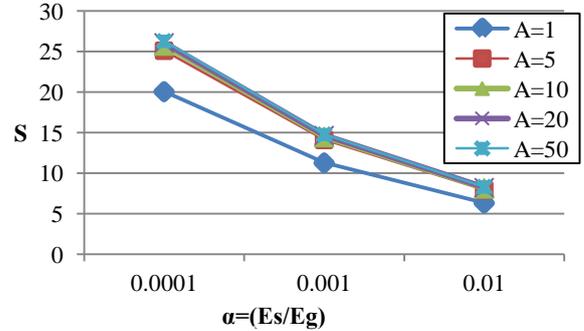


図3 螺旋ピッチ S と内・外層ヤング率比 α の関係

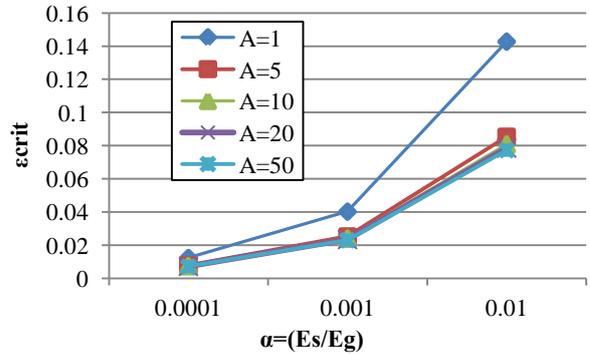


図4 臨界収縮歪 ε_{crit} と内・外層ヤング率比 α の関係

意味しており、妥当な結果といえる。

5. まとめ

本研究から以下の知見が得られた。

- ・ヤング率比 α が増大すると螺旋ピッチは小さくなる。
- ・ヤング率比 α が増大すると臨界収縮歪値は大きくなる。
- ・内部半径と中央部半径の比が大きくなるほど、螺旋ピッチ s 、臨界収縮歪値 ε_{crit} に与える影響は小さくなる。

6. 謝辞

本研究は平成24年度寿原記念財団研究助成(研究代表者:佐藤太裕)ならびに平成24年度旭硝子財団研究助成プログラム(研究代表者:島弘幸)を受け実施したものです。関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) G.G. Chassie, L.E. Becker and W.L. Cleghorn: Helical buckling of a whirling conducting rod in a uniform magnetic field, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.47, pp.38-53, 2012.
- 2) N.C. Huang and P.D. Pattillo: Helical buckling of a tube in an inclined wellbore Original International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.35, pp. 911-923, 2000.
- 3) Shigeru TANAKA: Fiber Coating Structure and Buckling due to Contraction, 電子通信学会論文誌 Vol.J68-B, No.9, 1985/9