

剛柔の規則積層構造における応力集中低減効果について

Reduction effect of stress concentration in laminated structure

北海道大学工学部 ○学生員 木村 響 (Kimura Kyo)
 北海道大学大学院工学院 正員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

多くの天然素材は複合構造から強さを引出す. その中でも硬いものと柔らかいものが組み合わさる事によって高い破壊靱性を発揮し, 緻密さも持ち合わせた構造が存在する. 自然界に存在する典型的な例として真珠の表面にある真珠層という物質が挙げられる. この物質は炭酸カルシウムのもろくて硬い層と, その 100 分の一程の薄さの柔らかいタンパク質の層が積層する層状構造を成しており, この体積分率にして数パーセントの違いが破壊靱性を大幅に高めることが分かっている.¹⁾

本研究では以上のような積層構造に発生した垂直亀裂を考え, 両端に一定変位を与えることによって発生する内部の変位を定式化して変位状態や応力分布を明確にし, 等方弾性体の場合と比較することでその応力集中低減効果を検証することを目的としており, ここではその定式化と変位状態, 応力分布について検証した.

2. 剛柔の規則積層構造について

2.1. 簡易モデル化と特徴

図 1-(a)に $x-y$ 軸で表された積層構造を単純化したモデルを示す. また図 1-(b)に y 軸方向と平行に亀裂が生じ x 軸方向に引っ張ったときの亀裂先端での変位の様子を示す.

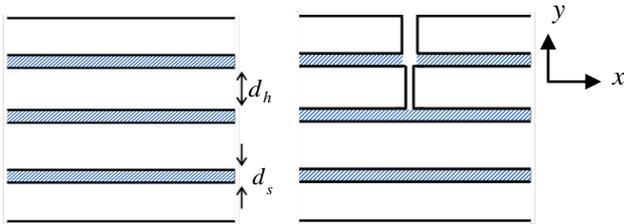


図-1(a) 図-1(b)
 図-1 規則積層構造の単純モデル

この構造が等方弾性体と比較して大きく異なる点は硬い層(厚み d_h 弾性係数 E_h)と柔らかい層(厚み $d_s \ll d_h$, 弾性係数 $E_s = \epsilon E_h$)それぞれの挙動にある. 柔らかい層を間に挟むことで硬い層同士は独立して振る舞うと考えられているため, x 方向に変位を与えた場合の重要な変形は y 軸方向の硬い層の伸長と柔らかい層のせん断変形となる.¹⁾ また $\epsilon \ll 1$, 層の厚み $d = d_h + d_s$ である.

2.2. 薄層境界における真珠層の弾性エネルギー

弾性係数 E やポアソン比 ν は積層構造の異方性により y の値によって変化するために, 応力は連続だが歪率は連続ではないといった現象が生じる. しかしここでは柔らかい層が極めて薄い状態であると仮定することでそれらが連続であるとし, 簡単のためにポアソン比 ν も両方の層で等しいとする. そうすると単位体積あたりの弾

性エネルギーはひずみ e_{ij} を用いて以下のように表せる.

$$f = \frac{E_h}{2(1-\nu^2)} e_{xx}^2 + \frac{E_0}{2} e_{yy}^2 + \frac{E_0}{1+\nu} e_{xy}^2 + \frac{\nu E_0}{1-\nu} e_{xx} e_{yy} \quad (1)$$

ここで

$$E_0 = \epsilon \frac{d}{d_s} E_h \quad (2)$$

また, ひずみで表された式(1)を変位 u_i を用いた式に変形し, x 軸方向の変位 u_x に比べて y 軸方向の変位 u_y は限りなく小さいため $u_y = 0$ を代入すると弾性エネルギーは次のようになる.

$$f = \frac{E_h}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_0}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

2.1.で述べたように式(3)の第一項が硬い層の伸長を, 第二項が柔らかい層のせん断変形を示している.

3. 非等方的な Laplace 方程式

式(3)から x 軸方向の変位 u_x は以下の Laplace 方程式を満たすことが分かる.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} \right) u_x = 0 \quad (4)$$

ここで \hat{y} は以下のようにリスケールされている.

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2d_s}{\epsilon d(1-\nu)}} y \quad (5)$$

この Laplace 方程式を解くことで変位 u を定式化するにあたり, 亀裂長 h_1 の入った積層構造モデルを以下のような領域に区分する.

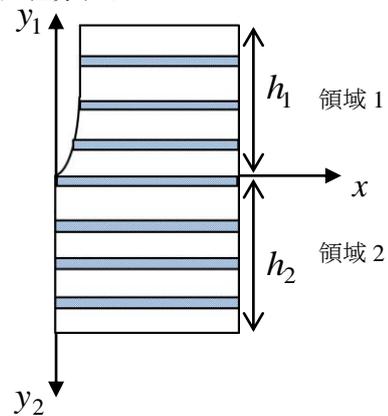


図-2 単純モデルの領域区分

領域 1, 2 における変位をそれぞれ u_1, u_2 として各領域に以下のような境界条件式(6)-(9)を与える。

$$u_1|_{x=L} = u_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

$$u_2|_{x=L} = u_0 \quad (8)$$

$$u_2|_{x=0} = 0 \quad (9)$$

これらを用いて Laplace 方程式を解くと u_1, u_2 を表した式(10)-(11)が得られる。

$$u_1 = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right) \frac{\cosh \lambda_1 (y-h_1)}{\cosh \lambda_1 h_1} \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{u_0}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \frac{\cosh \lambda_2 (y-h_2)}{\cosh \lambda_2 h_2} \quad (11)$$

ここで λ_1, λ_2 はそれぞれの固有値であり、次の値をとる。

$$\lambda_1 = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{L} \quad (12)$$

$$\lambda_2 = n \frac{\pi}{L} \quad (13)$$

次に係数を求めるが、この際に領域 1, 2 における変位とひずみの連続条件を用いる。
つまり $y=0$ において

$$u_1 = u_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2} \quad (15)$$

またここで未知の係数 β_1, β_2 を求める必要があるが、その際にフーリエ展開を用いて式(10)-(11)の左辺の第一項目を変形し、更に上記の連続条件を用いて β_1, β_2 に関する連立方程式を導出し計算すると以下の値が得られる。

$$\beta_1 = -\frac{2u_0(2n-1)}{n^2\pi} \frac{\tanh \lambda_2 h_2}{\tanh \lambda_1 h_1 + \tanh \lambda_2 h_2} \quad (16)$$

$$\beta_2 = \frac{2u_0}{n\pi} \frac{\tanh \lambda_1 h_1}{\tanh \lambda_1 h_1 + \tanh \lambda_2 h_2} \quad (17)$$

これらの値を式(10)-(11)にそれぞれ代入することで Laplace 方程式の解を得る。これをもって本研究で扱っている剛柔の規則積層構造における変位の定式化とする。

4. 解析結果

ここで定式化した領域 2 の変位を等高線グラフとしてプロットしたものが図-3 である。変位が大きいほど色が濃くなっていき、領域 2 において変位がほとんど見られない $x=0$ の付近では色が白く、一定の変位 u_0 を与えている $x=L$ の付近に向かって色が濃くなっている。亀裂

から離れている領域 2 においては変位がほぼ x のみに依存しており安定していることが読み取れる。また、 y_2 が小さくなり亀裂先端に近づくほど応力が集中していることもわかる。

また、図-4 には領域 2 における $x=0$ の応力分布を実線で示した。亀裂先端から十分に離れた遠方応力を σ_∞ とすると亀裂先端から遠ざかる (y_2 が大きくなる) に従って遠方応力 σ_∞ に漸近し、亀裂先端付近では応力が大きくなることも式(11)を変形することで確認できた。また等方弾性体における場合の領域 2 の応力分布は式(18)で表され¹⁾、図-4 に破線で示した。これらを比較すると積層構造の応力集中が大きく低減されていることが確認できる。

$$\sigma = \sigma_\infty \sqrt{\frac{2h_1}{y_2}} \quad (18)$$

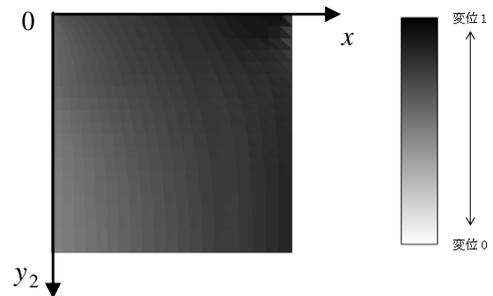


図-3 領域 2 の変位

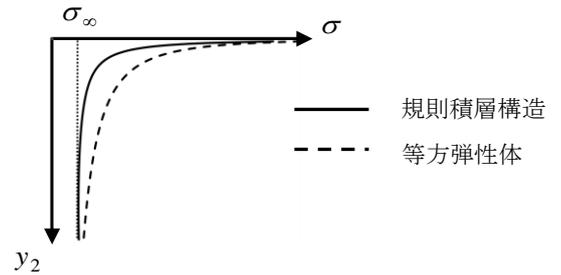


図-4 領域 2 における $x=0$ の応力分布比較

5. まとめ

本研究から以下の知見が得られた。

- ・積層構造における変位の定式化を行った。
- ・領域 2 における変位状態と応力分布を検証し、等方性構造の場合の応力分布と比較することで積層構造の応力集中低減効果を確認した。

6. 謝辞

本研究は JSPS 科研費若手研究(a)(課題番号: 2468609, 研究代表者: 佐藤太裕)の助成を受け実施したものです。関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) K.Okumura and P.-G de Gennes. Why is nacre strong? Elastic theory and fracture mechanics for biocomposites with stratified structures, The European Physical Journal E 4, (2001) 121-127