

## 不定形要素における二次元混合ハイブリッド有限要素法の基礎的検討

Fundamental Study on Two-Dimensional Mixed Hybrid FEM with Arbitrary-Shaped Elements

北海道大学工学部 ○学生員 上田明人 (Akito Ueda)  
 北海道大学大学院工学院 学生員 小松駿也 (Shunya Komatsu)  
 北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)

## 1. はじめに

混合ハイブリッド有限要素法 (MHF) とは、混合形式で表される支配方程式を離散化して計算する手法である。また、節点に目的変数を与える有限要素法 (FEM) とは異なり、MHF は要素の境界に目的変数を与える。FEM では非退化形式の支配方程式を展開するため、目的変数の導関数は目的変数よりも微分の階数だけ補間の次元が下がる。それに対し、MHF では混合形式の支配方程式を展開するため、目的変数や目的変数の導関数に対して自由に補間の次元を設定できる。FEM のように次元が完全に一致しているものを Complete 型、MHF のように次元の関係が完全ではないものを Incomplete 型という。このため、MHF では目的変数の補関数の制約を受けることなく、独自に適切な補関数をその導関数に対して与えることが可能となり、目的変数よりもその導関数が重視されるような問題、例えば、水の流動解析や応力集中問題において有利と考えられる。また、MHF は目的変数を境界に与えていることにより、流量や熱量の収支を直接求めることが可能であるため、例えば、熱伝達問題における物質の状態解析等において有効な手段であるといえる。本研究では、不定形要素に対する MHF の適用とその有効性について検討を行う。

## 2. 非退化形式と混合形式

非退化形式とは目的変数がひとつしかなく、これ以上目的変数を消去できない形式のことで、FEM において主に用いられる。次式で示す Laplace 方程式は流体の流れに関する非退化形式のひとつである。

$$k\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{式(1)}$$

目的変数がひとつしかないため、速度ポテンシャルについては直接求めることができる。しかし、その微分値である流速ベクトルは事後の計算により近似的に求めることになる。また、速度ポテンシャルを一次関数で補間すると、その一次導関数である流速ベクトルは要素内部で一定となるため、要素の境界において連続性が保証されないという問題がある。

一方、MHF で用いられる混合形式は目的変数を増やした次式で表される。

$$k\nabla\Phi = -\vec{q} \quad \text{式(2)}$$

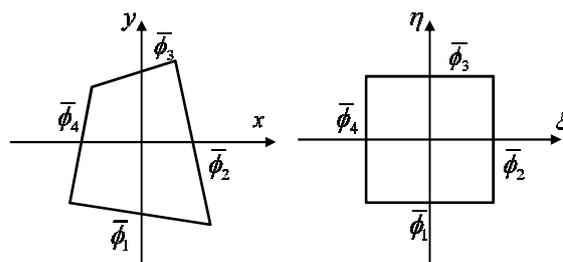
$$\nabla\vec{q} = 0 \quad \text{式(3)}$$

式(2)はダルシー則、式(3)は非圧縮性流体における質

量保存則を表す。混合形式では流速ベクトルが支配方程式に含まれているため、直接流速ベクトルを求めることができる。さらに流速ベクトルを線形に補間することも可能であるため要素の境界で連続性が保証される。

## 3. 不定形二次元モデル

図-1 に  $x-y$  軸で表された不定形二次元モデルと  $\xi-\eta$  軸で表された正規座標系二次元モデルを示す。これらは、変数変換マトリックスを用いて相互に変換される。一般的な FEM では要素の節点に目的変数を与えるのに対し、MHF では要素の境界に目的変数を与える。不定形モデルでは、座標変換を行い正規座標系に置き直して定式化を行う。



(a) MHF 一般座標系 (b) MHF 正規座標系  
 図-1 MHF の目的変数を与える位置とモデルの形状

## 4. 定式化

## 4.1. Raviart-Thomas 型形状関数

MHF では要素の境界に目的変数の一つである流量を与えているため、FEM に用いるような通常の形状関数とは異なる Raviart-Thomas 型形状関数<sup>2)</sup>を用いる。この形状関数はベクトルを持っており、さらに形状関数の各値を要素の辺長で除しているため、境界に与えられた流量から任意点の流速ベクトルを表現することができる。また、要素からの流出方向を正としているため、次式のような符号になっている。

$$[RT] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(1+\xi) & 0 & -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ -\frac{1}{4}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{4}(1+\eta) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{式(4)}$$

## 4.2. 変数変換マトリックス

MHF では流速ベクトルなど、ベクトルを持つ値を正規座標系に変換することで、不定形要素の計算を行う。解を求める際は、変数変換マトリックス $[T_{ij}]$ を用いた次式により変換する。

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[T_k]} [T_k][RT]\{\bar{Q}_i\} \quad \text{式(5)}$$

ここで

$$[T_k] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \text{式(6)}$$

### 5. 支配方程式の離散化

式(2)のダルシー則に重み関数を与えて要素全体で積分を行い、展開すると次式ようになる。

$$\oint_{S_k} k \bar{\phi} \delta \bar{W} n dS_k - \int_{\Omega_k} k \Phi_k \nabla \delta \bar{W} d\Omega_k + \int_{\Omega_k} \bar{q} \delta \bar{W} d\Omega_k = 0 \quad \text{式(7)}$$

本来、辺上や面上に与えられるべき流量が FEM では節点上に与えられる。このことが FEM の誤差を生じる原因のひとつだと考えられる。

離散化を進めると次式が得られる。

$$[M] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} k \Phi_k \int_{\Omega_k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Omega_k - \frac{1}{2} k \sum_i \bar{\phi}_i \frac{[T_k]^T}{\det[T_k]} [RT]^T \begin{Bmatrix} \Delta y_i \\ -\Delta x_i \end{Bmatrix} \quad \text{式(8)}$$

ここで

$$[M] = \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{1}{\det[T_k]} [T_k]^T [RT]^T [RT] [T_k] d\xi d\eta \quad \text{式(9)}$$

次に式(3)の質量保存則の離散化を行う。重み関数を与えて要素全体で積分を行い、展開すると次式ようになる。

$$\oint_{S_k} \bar{q} \delta \bar{W} n dS_k - \int_{\Omega_k} \bar{q} \nabla \delta \bar{W} d\Omega_k = 0 \quad \text{式(10)}$$

重み関数を 1 として有限体積法の考えを導入すると、次の式が得られる。

$$\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 + \bar{Q}_4 = 0 \quad \text{式(11)}$$

上式より、要素から流出する流量の総和は 0 であるという質量保存則が確認できる。式(8)と式(11)を連立方程式として解くことで解を求める。

### 6. 解析結果

今、簡単な不定形要素問題として、図-2 と図-3 の形状をした要素について考える。両要素とも下辺に  $\phi = 1$ 、上辺に  $\phi = 0$  を dirichlet 条件として与えた場合に上辺から流出する流量を分割数ごとに計算し、FEM の場合と比べたグラフをそれぞれ図-4 と図-5 に示す。なお、分割に関しては、正規座標系で両方向に等分割した。

両要素の結果より、MHF は FEM と比べて少ない分割数で流量の収束性が見られた。分割数は計算時のマトリックスの大きさに影響を与える。MHF は FEM よりも小さなマトリックスの計算で、分割数が多い場合の FEM と同程度の精度の値を得ることができる。また、図-5 において、少ない分割数に関して FEM では収束値よりも大きな値、MHF では小さな値を示した。FEM と MHF では不定形要素の形状に流速ベクトルが異なる影響を受ける。このことが流量算出に両手法の違いを生じていると考えられる。

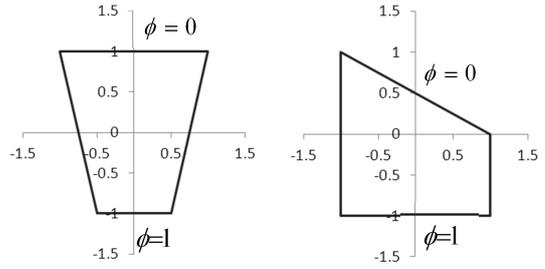


図-2 不定形要素 1

図-3 不定形要素 2

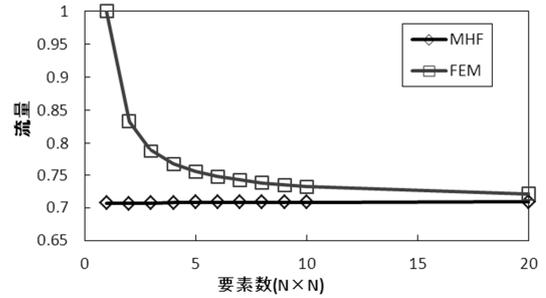


図-4 不定形要素 1 における流量の解析結果

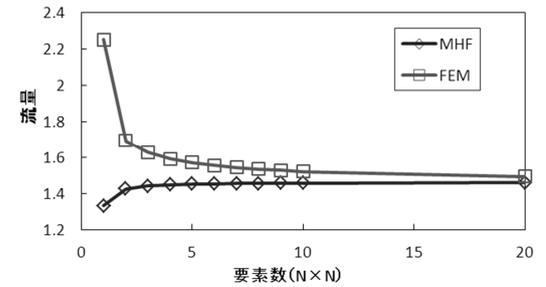


図-5 不定形要素 2 における流量の解析結果

### 7. まとめ

MHF は Incomplete 型として設定できるため、特に目的変数の導関数を求めたい場合において有効である。また、流量や熱量などの辺や面に与えられる変数に関して、その収支を直接的に求めることができる。さらに FEM と比べて少ない分割数における目的変数の微分値の収束性が高いことがわかった。また、要素の境界に目的変数を与える MHF は、FEM では困難であった要素境界における連続性を保証できるため、透水係数が大きく変化するような問題において、その精度を向上することができる。今後の研究では、MHF を現実的に活用できるような三次元への拡張と、支配方程式に時間項を含むような問題、例えば非定常状態における熱量の収支解析などを行う必要がある。

### 参考文献

- 1) 小松駿也：三次元混合ハイブリッド FEM に関する基礎的検討，北海道大学環境社会工学科平成 23 年度卒業論文
- 2) P.A.Raviart and J.M.Thomas : A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606, Springer-Verlag,1977