

# 河床低下を考慮に入れた蛇行の線形安定解析

Linear stability analysis of meandering with bed degradation

北海道大学大学院工学院 ○学生会員 青木章宜(Akinori AOKI)  
北海道大学工学研究院 教授 正会員 泉典洋(Norihiro IZUMI)

## 1. はじめに

近年、治水・利水施設による土砂流入量の減少によって河床低下が生じている河川が全国的に見られるようになってきている。北海道を例に挙げると、石狩川上流域で、河床低下によって岩盤が約 8 km にわたって露出し、それに伴う滯筋の固定といった事例が報告されている<sup>1)</sup>。ほかにも河床低下による問題として、護岸、根固め等の河川管理施設が抜けあがり、不安定な状態になり、治水機能の低下を招くこと等が挙げられ、河床低下が河川に与える影響についての知見が求められている。

蛇行の解析は数多くなされてきている<sup>2)3)4)</sup>。しかし、土砂供給量の変化による河床低下が蛇行の発生に与える影響について述べられているものは、著者らの知る限り未だ存在していない。

そこで本研究では、高畑ら<sup>5)</sup>によって提案された河床低下を考慮に入れた砂州の線形安定解析の手法を用い、蛇行の安定解析を行う。具体的には、土砂供給量の減少による河床低下速度を微小パラメータとして蛇行の線形安定解析に導入し、河床低下によって蛇行の発生がどのような影響を受けるのかを理論的に明らかにする。

## 2. 支配方程式

準定常の仮定を用い、河床形状の時間変化は流れの時間変化に比較して十分に遅く、流れの時間微分項は十分に小さくなり無視できると仮定する。また、横断方向への二次流が無視できるほどに十分曲率が小さく、境界が侵食され得る、広幅矩形蛇行河川(図-1, 2 参照)を想定する。以下(\*)は次元量を示す。

このとき Sine generated curve を以下のように表す。

$$\frac{1}{r_0^*} = \frac{1}{R_0^*} \exp(i(\lambda_m s - \omega t)) \quad (1)$$

$R_0^*$ は曲面頂点での曲率半径の二倍、 $r_0^*$ は任意点での曲率半径、 $\lambda_m$ は蛇行波数、 $\omega$ は複素角周波数となる。また、以下のように曲率半径を無次元化し、

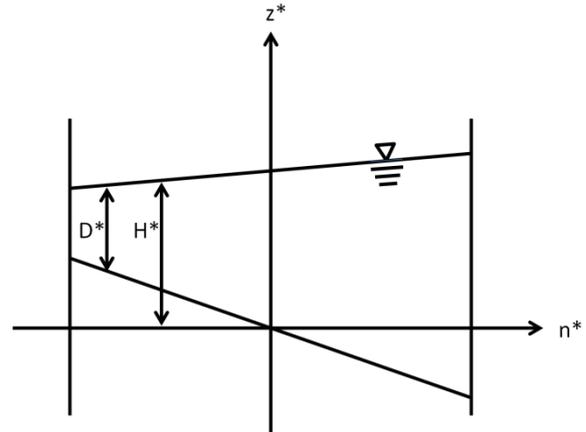


図-1 流路の断面図

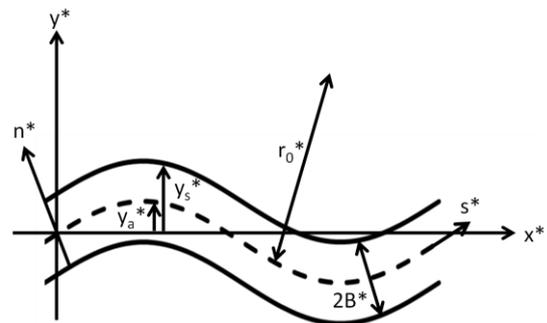


図-2 流路の上面図

$$r_0^* = R_0^* r_0 \quad (2)$$

曲率が小さいので、以下のようにおいた  $v$  は、

$$v = \frac{B^*}{R_0^*} \ll 1 \quad (3)$$

の条件を満たす。

このとき流れは以下の無次元化された方程式で表される。

$$V \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{r_0}{r_0 + vn} U \frac{\partial U}{\partial s} + v \frac{UV}{r_0 + vn} + \frac{r_0}{r_0 + vn} \frac{\partial H}{\partial s} - C_f \beta \frac{r_0}{r_0 + vn} \sigma + \beta \frac{C_f U (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{D} = 0 \quad (4)$$

$$V \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{r_0}{r_0 + vn} U \frac{\partial V}{\partial s} - v \frac{U^2}{r_0 + vn} + \frac{\partial H}{\partial n} + \beta \frac{C_f V (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{D} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial VD}{\partial n} + \frac{r_0}{r_0+vn} \frac{\partial UD}{\partial s} + v \frac{VD}{r_0+vn} = 0 \quad (6)$$

ここで  $C_f$  は抵抗係数を示し、本研究では定数とする。また、 $\beta$  は川幅水深比( $B^*/D_0^*$ )を表す。また  $\sigma$  は、注目している地点での平均河床勾配  $S_0$  で正規化した河床勾配であり、 $\sigma=S/S_0$  と表す。

河床の時間変化は土砂の連続式から次のように表す。

$$\frac{\partial(F_0^2 H-D)}{\partial t} + \left( \frac{\partial q_n}{\partial n} + \frac{r_0}{r_0+vn} \frac{\partial q_s}{\partial s} + v \frac{q_n}{r_0+vn} \right) = 0 \quad (7)$$

ここで  $s$  および  $n$  方向の無次元の土砂輸送量  $q_s$  および  $q_n$  は次のように表す。

$$(q_s, q_n) = (\cos\delta, \sin\delta)\Phi \quad (8)$$

ここで  $\sin\delta$  は Ikeda<sup>6)</sup>、Parker<sup>7)</sup> によって求められた式に、流路湾曲を考慮に入れた Engelund<sup>9)</sup> の式を取り入れた以下のものを用いる、  
を用い、

$$\sin\delta = \frac{v}{(U^2+V^2)^{\frac{1}{2}}} - a \frac{v}{\beta r_0+vn} - \frac{r}{\beta \theta^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial(F_0^2 H-D)}{\partial n} \quad (9)$$

$\Phi$  は以下の Meyer-Peter and Muller 式を用いる。

$$\Phi = 8(\Theta - \Theta_c)^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

ここで  $\Theta$  はシールズせん断力であり、 $\Theta_c$  は掃流限界でのシールズせん断力(= 0.047)である。 $r$  は定数であり、Seminar<sup>ら</sup> <sup>4)</sup>によると 0.3~0.6 までの値を取るという。ここでもその値を取るとする。

上記の式には以下の無次元化を導入している。

$$(U^*, V^*) = U_0^*(U, V) \quad (11)$$

$$(H^*, D^*) = D_0^*(F_0^2 H, D) \quad (12)$$

$$(s^*, n^*) = B^*(s, n) \quad (13)$$

$$(q_s^*, q_n^*) = d_s^*(R_s g d_s^*)^{\frac{1}{2}}(q_s, q_n) \quad (14)$$

$$t^* = \frac{B^*}{U_0^* Q_0} t \quad d_s^* = D_0^* d_s \quad (15, 16)$$

ここで  $U_0^*$  は等流平均流速、 $D_0^*$  は等流平均水深、 $R_s$  は土砂の水中比重であり、 $g$  は重力加速度、 $d_s^*$  は土砂の粒径を表す。ここで  $Q_0$  は流量と流砂量との比を表した無次元パラメータであり、以下のように表わされる。

$$Q_0 = \frac{d_s^*(R_s g d_s^*)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)D_0^* U_0^*} \quad (17)$$

ここで  $p$  は土砂の間隙率を表す。

### 3. 弱非平衡状態の線形安定性理論

#### 3.1 曲面理論

弱非平衡状態の説明の前に、まず曲率と蛇行との関係性を示す。フーリエ級数展開によって曲率半径は(1)のように書ける。また、流路軸(図-2 参照)の式を以下のようにおく。

$$y_a = A \exp(i(kx - \omega t)) + c. c. \quad (18)$$

$y_a$  は  $B^*$  により無次元化されている。曲率の定義から

$$\frac{1}{r_0^*} = \frac{1}{B^*} \frac{d^2 y_a}{dx^2} \quad (19)$$

といえ、(19)に(1)(18)を代入し、

$$v \exp(i(\lambda_m s - \omega t)) + c. c. = A k^2 \exp(i(k s - \omega t)) + c. c. \quad (20)$$

(20)の両辺を見比べることで、以下の関係を得る。

$$v \cong k^2 A \quad \lambda_m \cong k \quad s \cong x \quad (21, 22, 23)$$

#### 3.2 一次元基本状態

次に河床が低下している一次元基本状態の河床の縦断形状や流れを考えてみる。土砂供給量が減少した場合、上流端から供給量に見合った勾配に減少し、その変化が下流に伝わって全体の勾配が小さくなっていく。その過程で上に凸の縦断形状が現れる。このような縦断形状が現れると流れは下流方向に加速され、土砂輸送量も下流に行くにしたがって大きくなる。そうすると河床は低下していくことになる。本研究でも河床低下は上流からの土砂供給量の多寡によって発生するとする。また、問題を簡単にするため、一様な速度で河床低下している状況を考える。下流端や上流端が固定されている場合、一様な速度で河床低下しているような状況はあり得ないが、考えている領域が下流端から十分遠く離れているような場合は下流端の影響はゆっくりしか現れないため、短期的に見るとほぼ一様に河床低下しているとみなしてよい。さらに河床低下は通常の河床変動と比べると非常に長い時間かけて進行すると仮定する。すると河床勾配の場所的な変化は非常に小さく、ある区間を取り出して考えるとほぼ一様な勾配な水路と考えて差しつかえない。すなわち河床勾配が有意に変化する距離に比べると砂州の波長の長さスケールは十分に小さいと仮定する。以下では多重尺度法の考え方を用い、この二つの長さスケールの比を微小パラメータとした二重展開を行う。いま河床高がゆっくりと低下しているとし、河床の低下速度を  $-\epsilon$  と表す。そのとき次式が成立する。

$$\frac{\partial(F_0^2 H_0 - D_0)}{\partial t} = -\epsilon \quad (24)$$

ここで、蛇行のスケール程度の長さスケールを表す流下方向座標  $s_0$  の他に、河床低下・上昇速度に対応した河床勾配の変化を表す長さスケール  $s_1$  を導入する。河床勾配がゆっくりと変化すれば、河床勾配、流速および水深は流下方向にゆっくりと変化することとなり、 $s_0$  のスケールで見ると一定であるが、 $s_1$  のスケールで見ると変化していると考えられる。ここで  $s_0$  および  $s_1$  はそれぞれ次のように定義される。

$$s_0 = s, \quad s_1 = \epsilon s \quad (25, 26)$$

よって  $s$  微分は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial s_0}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s_0} + \frac{\partial s_1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial s_1} \quad (27)$$

多重尺度法の考えから以下のような展開を導入する.

$(U, H, \sigma) =$

$$(U_{00}(s_1), H_{00}(s_1), \sigma_0(s_1)) + \epsilon(U_{01}(s_1), H_{01}(s_1), \sigma_1(s_1)) \quad (28)$$

式(27) および(28) を一次元基本状態の支配方程式に代入し  $\epsilon$  のオーダーで整理し解くと,  $O(1)$ のオーダーまでの解は次のように得られる.

$$U_{00} = \left( \left( -\frac{\gamma s_1}{8\theta_0^2} + \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (29)$$

$$D_{00} = \left( \left( -\frac{\gamma s_1}{8\theta_0^2} + \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (30)$$

$$\sigma_0 = \left( \left( -\frac{\gamma s_1}{8\theta_0^2} + \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (31)$$

$$\sigma_1 = C_f \beta \left( U_{00} \frac{\partial U_{00}}{\partial s_1} + \frac{1}{F_0^2} \frac{\partial D_{00}}{\partial s_1} \right) \quad (32)$$

$$U_{01} = 0 \quad D_{01} = 0 \quad (33, 34)$$

### 3.3 二次元摂動問題

蛇行に対して流下方向にサイン型の進行波擾乱を与え, 次のような摂動展開を導入する.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ H \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{00}(s_1) + \epsilon U_{01}(s_1) \\ 0 \\ 0 \\ D_{00}(s_1) + \epsilon D_{01}(s_1) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} U_{10}(s_1, n) + \epsilon U_{11}(s_1, n) \\ V_{10}(s_1, n) + \epsilon V_{11}(s_1, n) \\ H_{10}(s_1, n) + \epsilon H_{11}(s_1, n) \\ D_{10}(s_1, n) + \epsilon D_{11}(s_1, n) \end{bmatrix} \exp[i(\lambda_m s_0 - \omega t)] \quad (35)$$

また複素角周波数  $\omega$  も次のように展開する.

$$\omega = \omega_0(s_1) + \epsilon \omega_1(s_1) \quad (36)$$

上記の摂動展開には以下の条件が与えられる.

側壁部を通過する流れは無い.

$$V = 0 \quad \text{at } n = \pm 1 \quad (37)$$

側壁部を通過する流砂量は無い.

$$q_n = 0 \quad \text{at } n = \pm 1 \quad (38)$$

摂動により平均河床勾配は変化しない.

$$\int_0^{2\pi} \lambda_m ds \int_{-1}^1 (F_0^2 H - D) dn = \text{const} \quad (39)$$

また, 砂州の時間変化は蛇行のそれよりも早く, 河床の時間変化を以下の形で置き換えられるとする.

$$\frac{\partial (F_0^2 H - D)}{\partial t} = -\epsilon \quad (40)$$

上記の摂動展開を(40)の仮定を用いて, 式(4)-(7)に代入

し,  $\epsilon$  および  $A$  を微小パラメータとしてそれらのオーダーで整理すると, 次のような結果が得られる. なお,  $O(\epsilon^1 A^0)$ からは, 一次元基本状態で求めた解が得られる.  $O(\epsilon^0 A^1)$ を取りだすと

$$(2C_f \beta + i\lambda_m)U_{10} + i\lambda_m H_{10} - C_f \beta D_{10} = -C_f n \beta \lambda_m^2 \quad (41)$$

$$(C_f \beta + i\lambda_m)V_{10} + \frac{dH_{10}}{dn} = \lambda_m^2 \quad (42)$$

$$i\lambda_m U_{10} + \frac{dV_{10}}{dn} + i\lambda_m D_{10} = 0 \quad (43)$$

$$24i\theta_0 \sqrt{\theta_0 - \theta_c} \lambda_m U_{10} + 8(\theta_0 - \theta_c)^{\frac{3}{2}} \frac{dV_{10}}{dn} - \frac{8rF_0^2(\theta_0 - \theta_c)^{\frac{3}{2}} d^2 H_{10}}{\beta \sqrt{\theta_0} dn^2} + \frac{8r(\theta_0 - \theta_c)^{\frac{3}{2}} d^2 D_{10}}{\beta \sqrt{\theta_0} dn^2} = 0 \quad (44)$$

上記の連立方程式を変形していくと, 以下の微分方程式を得る.

$$\frac{d^4 V_{10}}{dn^4} + \Gamma_1 \frac{d^2 V_{10}}{dn^2} + \Gamma_2 V_{10} = \Gamma_0 \quad (45)$$

この方程式を解くために,  $O(\epsilon^0 A^1)$ のときの境界条件(37)(38)を用いる. これより(45)を解くことができ,  $V_{10}$ を求めることができる. また, (42)より  $H_{10}$ を, (43)(44)より  $U_{10}$ ,  $D_{10}$ を求めることができる.

$O(\epsilon^1 A^1)$ を取りだすと

$$(2C_f \beta + i\lambda_m)U_{11} + i\lambda_m H_{11} - C_f \beta D_{11} = b_1(s_1, n) \quad (46)$$

$$(C_f \beta + i\lambda_m)V_{11} + \frac{dH_{11}}{dn} = b_2(s_1, n) \quad (47)$$

$$i\lambda_m U_{11} + \frac{dV_{11}}{dn} + i\lambda_m D_{11} = b_3(s_1, n) \quad (48)$$

$$24i\theta_0 \sqrt{\theta_0 - \theta_c} \lambda_m U_{11}$$

$$+ 8(\theta_0 - \theta_c)^{3/2} \frac{dV_{11}}{dn} - \frac{8F_0^2 r (\theta_0 - \theta_c)^{3/2} d^2 H_{11}}{r \sqrt{\theta_0} dn^2} + \frac{8r(\theta_0 - \theta_c)^{3/2} d^2 D_{11}}{\beta \sqrt{\theta_0} dn^2} = b_4(s_1, n) \quad (49)$$

ここで  $b_1 \sim b_4$  は  $U_{10}$ ,  $V_{10}$ ,  $H_{10}$ ,  $D_{10}$ ,  $U_{00}$ ,  $D_{00}$  の関数となる.  $O(\epsilon^0 A^1)$ の時と同様にして, 上記の連立方程式を変形し, 以下のような微分方程式を得る.

$$\frac{d^4 V_{11}}{dn^4} + \Gamma_4 \frac{d^2 V_{11}}{dn^2} + \Gamma_5 V_{11} = \Gamma_6 \quad (50)$$

$O(\epsilon^1 A^1)$  の境界条件(37)(38)より,  $V_{11}$ が求まり,  $O(\epsilon^0 A^1)$ の時と同様にして  $H_{11}$ ,  $U_{11}$ ,  $D_{11}$ も求まる.

### 3.4 蛇行安定性

壁面侵食率を Ikeda ら<sup>9)</sup>は以下のように表した.

$$\zeta^* = n_y \frac{\partial y_s^*}{\partial t^*} \quad (51)$$

ここで  $n_y$  は  $y$  軸と壁面からの法線との間のコサインを表す. 壁面が垂直と仮定すると,  $n_y = 1$  となる. また, 壁面侵食率は, 壁面近くで  $s$  軸方向のせん断応力  $\tau_s$  の関数であると仮定できるため, 摂動の加わっているこの状況では以下のように書くことができる.

$$\zeta^* = E [\delta \tau_s^*]_{n=1} \quad (52)$$

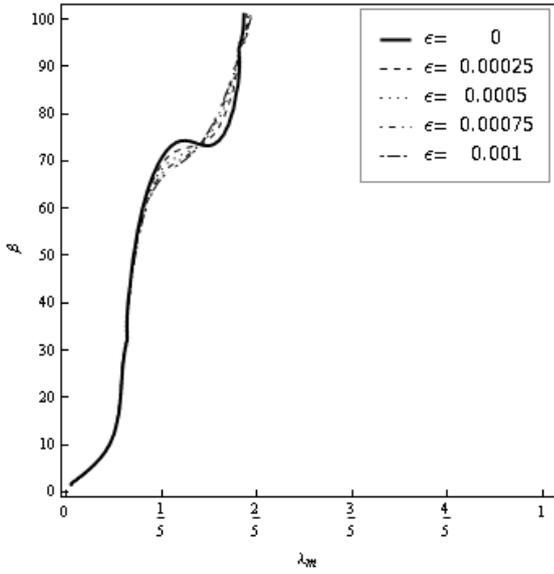


図-3 波数の小さい領域  
( $d_s=0.005$ ,  $\Theta_0=0.25$ )

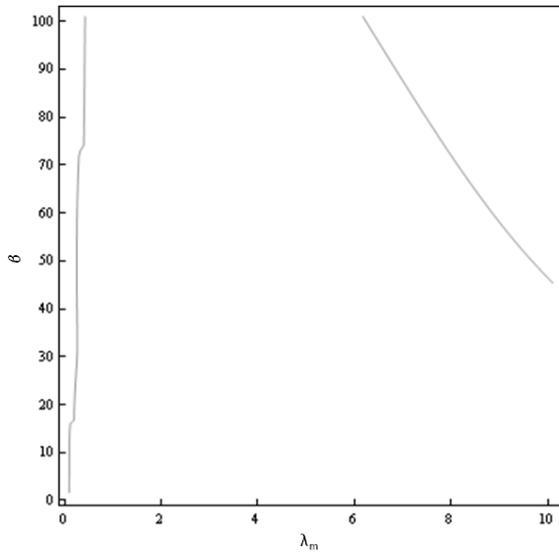


図-4 波数が大きい領域  
( $d_s=0.005$ ,  $\Theta_0=0.25$ ,  $\epsilon=0.0001$ )

ここで  $\delta\tau_s^*$  はせん断応力の摂動部分である。また、

$$y_a^* + B^* \cong y_s^* \quad (53)$$

より

$$E[\delta\tau_s^*]_{n=1} = \frac{\partial y_s^*}{\partial t^*} = \frac{\partial y_a^*}{\partial t^*} \quad (54)$$

となり  $\delta\tau_s^*$  から  $\omega$  を求めることができ、

$$\begin{aligned} -i(\omega_0(s_1) + \epsilon\omega_1(s_1)) &= \frac{E\rho U_0^* 2C_f}{Q_0} (U_{10} + \epsilon U_{11}) \\ &= C_\omega (U_{10} + \epsilon U_{11}) \end{aligned} \quad (55)$$

ここで  $C_\omega$  は定数となる。

#### 4. 結果と考察

増幅率  $\omega_0 + \epsilon\omega_1 = 0$  となる中立曲線を、河床勾配が一定の場合には実線で、河床が低下傾向にある場合は点線でそれぞれ描いたのが図-3 である。ここで、縦軸はアスペクト比  $\beta$ 、横軸は波数  $\lambda_m$  である。中立曲線の上側で増幅率は正となり、流路は不安定となって蛇行が形成されることを意味している。図-3 から分かるように、河床が低下傾向にある場合、波数の小さい領域では、アスペクト比 70, 100 付近で、不安定域が波数の増大する方向に広がり、アスペクト比 80 付近で、不安定域が波数の減少する方向に狭まることが見てとれる。また、図-4 からわかるように、波数の大きい領域では、新たな不安定域が現れる。

以上のことから河床低下は、アスペクト比が大きい領域で波数の小さい蛇行発生に影響を与え、また、波数の大きい蛇行発生に対して大きな影響を持っていると言える。

#### 参考文献

- 1) 松本勝治, 田代隆志, 根本深: 石狩川上流における河床低下について, 第 52 回北海道開発技術研究発表会資料, 2009.
- 2) Blondeaux, P. and Seminara, G. ; A unified bar-bend theory of river meanders, J. Fluid, Mech. Vol. 157, pp. 449-470, 1985.
- 3) Johannesson, H. and Parker, G. ; Secondary Flow in Sinuous Channel, ASCE J. Hydraul, Engng. Vol. 115, pp. 289 -308, 1989.
- 4) Seminara, G. and Tubino, M. ; Weakly nonlinear theory of regular meanders, J. Fluid, Mech. Vol. 224, pp. 257-288, 1992.
- 5) 高畑知明, 泉典洋 ; 河床低下を伴う砂州の線形安定解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 67 号, B-12, 2011
- 6) Ikeda, S. ; Lateral Bed Load Transport on Side Slopes, ASCE J. Hydraul, Div. Vol. 108, pp. 1369-1371, 1982.
- 7) Parker, G. ; Lateral Bed Load Transport on Side Slopes, ASCE J. Hydraul, Engng. Vol. 110, pp. 197-199, 1984.
- 8) Engelund, F. ; Flow and bed topography in channel bends, ASCE J. Hydraul, Div. Vol. 100, pp. 1631-1648, 1974.
- 9) Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K. ; Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development, J. Fluid, Mech. Vol. 112, pp. 363-377, 1981.