Ｂ－１８　　平成23年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第68号

タンクモデル未知定数の数学的最適化手法について

Mathematical Optimization Method on Unknown Parameters in Tank model

北海学園大学工学部　　　正　員　嵯峨　浩（*Hiroshi Saga*）
北海学園大学大学院　　○学生員　亀山初基（*Hatsuki Kameyama*）

1. はじめに

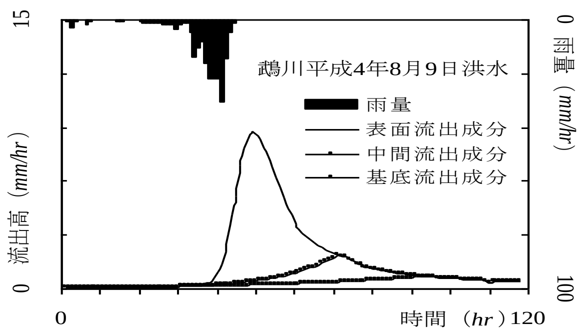
菅原のタンクモデルは、タンクを直列に三段または四段に並べた構造で、短期出水・長期出水の解析によく使われるおなじみの流出解析モデルである。適合性の良さはすでに知られているところであるが、多数の未知定数の最適同定には多大なる経験が必要とされる。数学的に最適同定する方法としては、パウエル法[1)]や遺伝的アルゴリズム[2)]などがあるが、その手法は極めて複雑である。本研究は簡便に未知定数を推定することを目的として、ニュートン法により単一のタンクモデルの未知定数を数学的に最適化する手法を提案する。さらに、入出力の時間差から一つの未知定数を確定値として扱う方法も提案する。

具体的には、タンクの構造は図―2 のように菅原のモデルを参考にして 4 種類とし、それぞれの最適化手法を構築した。実測ハイドログラフへの適用は、減水部情報から流出成分ごとに成分分離し、それぞれの流出成分に対して 1 個のタンクを対応させた。また、流域の大きさによってタンクの構成を変え、最適なモデル構成ができるかどうか検討した。

2. 流出成分の分離

流出成分の分離法は、ハイドログラフ立上がり点と減水部第二折曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。ただし普通軸上で直接流出成分と基底流出成分を直線分離すると、立上がり点付近で負の値が生じることがある。これを防ぐために対数グラフ上で直線分離をおこなった。直接流出成分を表面流出成分と中間流出成分に分離する場合は、第一折曲点を採用した。成分分離した一例を図―1 に示す。

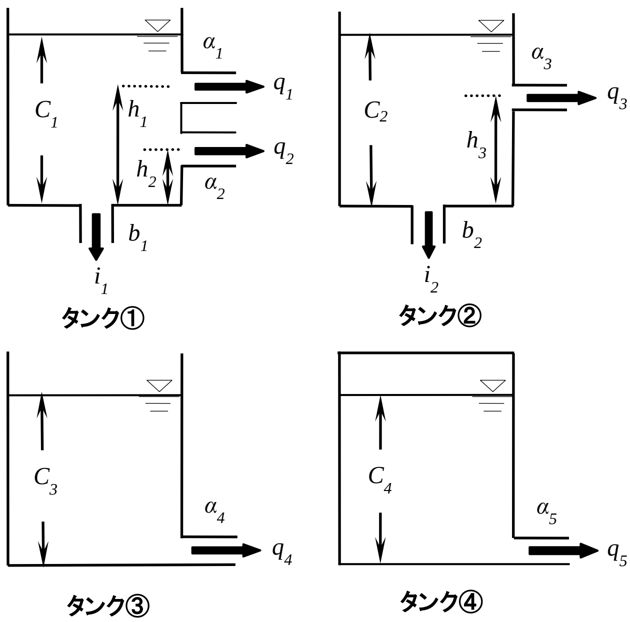
この他に、ハイドログラフ減水部の標準逓減曲線[3)]特に 1 次の標準逓減曲線を用いて基底流出成分の分離を行っている。これは図―2 に示したタンク④をそのまま基底流出成分に対応させた場合である。



図―1　流出成分分離図

3. タンクの構造

本研究で対象とした 4 種類のタンクの構造を図－2 に示す。



図―2　タンクモデルの構造

C_1～C_4：貯留高（*mm*）、q_1～q_5：側方流出高（*mm/hr*）、i_1、i_2：浸透高（*mm/hr*）、α_1～α_5：側方流出孔係数、h_1～h_3：側方流出孔高さ（*mm*）、b_1、b_2：浸透孔係数

図―2 において、例えばタンク①で最適化すべき未知パラメータは、α_1、α_2、h_1、h_2、b_1 の 5 個である。

タンク④の α_5 については、標準逓減曲線における逓減係数と同じである。すなわち、タンク④は未知パラメータがないことになる。また、タンク④で上蓋がついているが、このタンクは先行降雨により流出したもので、対象としている降雨には無関係であることから、上部タンクからの入力がないことを意味している。

未知パラメータの最適化は、大きな流域の場合、直列三段タンクモデルの構成とし、表面流出成分に対応したタンクを 1 段目、中間流出成分を 2 段目、基底流出成分を 3 段目とする。小流域では直接流出成分と基底流出成分に対応した直列二段タンクモデルで、それぞれに対応した流出成分ごとに最適化を行った。

最上段タンクの入力は観測降雨であるが、下部タンクは上部タンクの未知パラメータが最適化されていることから、上部タンクの浸透高が下部タンクへの入力となる。

4. 数学的最適化手法[4)、5)]

本研究では、図—2 のように 4 種類のタンクについてそれぞれ最適化のアルゴリズムを構築したが、紙面の関係上一番複雑なタンク①のみについて述べる。支配方程式は（1）式で表される。

$$\frac{dC_1}{dt} = r - q - i_1 \qquad \cdots (1)$$
$$q = q_1 + q_2$$

ここで、
$$q_j = \alpha_j (C_1 - h_j) \cdot Y(C_1, h_j)\ ,_{j=1,2} \qquad \cdots (2)$$
$$i_1 = b_1 \cdot C_1$$

r：降雨量、$Y(C_1,h_j)$：*Heaviside* 関数（ステップ関数）

（2）式のようにステップ関数を用いると、貯留高と側方流出孔高さの大きさで場合分けすることなく、流出高は一つの式で表現できる。本研究ではステップ関数の近似関数として（3）式で示される *Heaviside* 関数を用いた。

$$Y(C_1,h_j) = \frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{C_1 - h_j}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\right\},\ _{j=1,2} \qquad \cdots (3)$$

ここで、ε は 10^{-6} 程度である。以後、$Y(C_1,h_j)$は Y_j と表記する。

（1）式は見かけ上、線型微分方程式であるが、実際にはステップ関数が介在するため、不連続になっており非線形微分方程式である。

（2）式を（1）式に代入すると、（4）式となる。

$$\frac{dC_1}{dt} = AC_1 + B \qquad \cdots (4)$$

ここで、
$$A = -\alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2 - b_1$$
$$B = \alpha_1 h_1 Y_1 + \alpha_2 h_2 Y_2 + r$$

（4）式を差分表示すると次式のようになる。

$$C_{1,k+1} = \varphi C_{1,k} + \gamma B_k \qquad \cdots (5)$$

ここで、
$$\varphi = e^{AT}$$
$$\gamma = A^{-1}(e^{AT} - 1)$$

（5）式は漸化式となっており、容易に計算を行うことができる。

本研究では、未知パラメータを数学的に最適化する方法として、感度係数を用いたニュートン法を採用した。目的関数は(6)式で定義される。

$$MinJ = \sum e_j^{\,2} \quad ,\ _{j=1,2,3,\cdots,N} \qquad \cdots (6)$$

ここで、
$$e_j = \frac{q_j^{\,*} - q_j}{\sqrt{q_j^{\,*}}}$$

q_j*：観測流出高、q_j：計算流出高、N：流量標本数

ニュートン法における（$m+1$）ステップ時の未知パラメータは次式で算出される。m は計算過程におけるステップ数を示し、ΔP^m は補正値を示す。

$$P^{m+1} = P^m + \Delta P^m \qquad \cdots (7)$$

ここで、
$$P^m = \begin{bmatrix} \alpha_1^{\,m} \\ \alpha_2^{\,m} \\ h_1^{\,m} \\ h_2^{\,m} \\ b_1^{\,m} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta P^m = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_1^{\,m} \\ \Delta\alpha_2^{\,m} \\ \Delta h_1^{\,m} \\ \Delta h_2^{\,m} \\ \Delta b_1^{\,m} \end{bmatrix}$$

補正値は、（8）式によって算出され、効率よく算定できる成分回帰手法を併用した[4)]。T は転置を意味する。

$$\Delta P^m = \left[X^T X\right]^{-1}\left[X^T E\right] \qquad \cdots (8)$$

ここで、
$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,5} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,5} \end{bmatrix}$$

ここで、
$$x_{j,1} = \frac{1}{\sqrt{q_j^{\,*}}}\cdot\frac{\partial q}{\partial \alpha_1}\ ,\ x_{j,2} = \frac{1}{\sqrt{q_j^{\,*}}}\cdot\frac{\partial q}{\partial \alpha_2}\ ,\cdots\cdots$$

（7）式を繰り返し計算し、（9）式で示される条件を満たしたならば収束とする。ε は 1%～5%程度にとれば十分である。

$$\varepsilon \geq \left|\frac{\Delta P^m}{P^m}\right| \qquad \cdots (9)$$

4.1. 感度係数の算出

感度係数は未知パラメータの変化に対する流出高の変化を表し、効率よく補正値 ΔP^m を求めるために導入される。

感度係数 U は次式によって算出される。

$$U = \left(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2\right)W + D \qquad \cdots (10)$$

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial q}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial q}{\partial h_1} & \dfrac{\partial q}{\partial h_2} & \dfrac{\partial q}{\partial b_1} \end{bmatrix}^T$$

ここで、
$$W = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial C_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial C_1}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial C_1}{\partial h_1} & \dfrac{\partial C_1}{\partial h_2} & \dfrac{\partial C_1}{\partial b_1} \end{bmatrix}^T$$
$$D = [(C_1 - h_1)Y_1 \quad (C_1 - h_2)Y_2 \quad -\alpha_1 Y_1 \quad -\alpha_2 Y_2 \quad 0]^T$$

従って、（10）式における W を求めると、感度係数が求まる。W は次式で求めることができ、（4）式と同様な方法で容易に計算可能である。

$$\frac{dW}{dt} = AW + V \qquad \cdots (11)$$

ここで、
$$V = [-(C_1 - h_1)Y_1 \quad -(C_1 - h_2)Y_2 \quad \alpha_1 Y_1 \quad \alpha_2 Y_2 \quad -C_1]^T$$

5. 未知定数の理論的推定について

タンク①では未知定数が 5 個であるが、実際に実流域に適用してみると、収束性において実用上疑問を生じる結果となった。収束性を高めるためには未知定数の数を 1 個でも少なくすることが必要である。本研究では、入

力後出力が発生するまでの時間差を考慮して、側方流出孔高さ h_2 を推定する方法を考案した。

流出成分を分離した結果、表面流出成分は入力後しばらく出力が発生しない。その後出力は発生するが、この時の時間を T_0 とする。T_0 まではタンクに入力が溜まる一方であり、T_0 で初めて出力が出現することから、この時間での貯留高を側方流出孔高さとしてやれば良い。

出力が発生するまでは、浸透孔のみのタンクであるから、貯留高は以下のように理論的に求めることが可能である。

連続の式は、次式で示される。

$$\frac{dC_1}{dt} + C_1 \cdot b_1 = r \qquad \cdots (12)$$

（12）式の解は次式で示される。

$$C_1(t) = C_{1,0} e^{-b_1 \cdot t} + \int_0^t e^{-b_1 (t-\tau)} r(\tau) d\tau \qquad \cdots (13)$$

ここで、$C_{1,0}$ は初期貯留高である。また、（13）式の積分項は離散値の場合、（14）式のように計算できる。

$$A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_1}\left(1 - e^{-b_1 \cdot t}\right) & t < \Delta t \\ \dfrac{1}{b_1} \cdot e^{-b_1 \cdot t}\left(e^{b_1 \cdot \Delta t} - 1\right) & t \geq \Delta t \end{cases} \qquad \cdots (14)$$

すなわち、$t=T_0$ で流出が始まるので、（13）式おいて時刻が T_0 の時の値を h_2 とする。すなわち、浸透孔係数 b_1 が決まると一義的に h_2 が決まることになり、未知パラメータを１個減らすことができる。また、（14）式からわかるように任意の初期貯留高 $C_{1,0}$ を与えても、出力の出現時刻 T_0 は変わることがない。

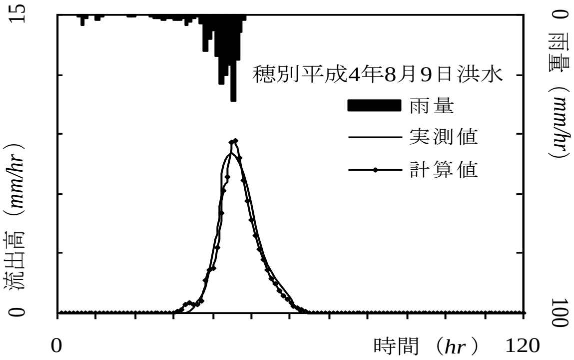
6. 実流域への適用

上述の理論を鵡川流域の流出に適用した。基準点は穂別で、流域面積は 949.5（km^2）である。このときの出水は、氾濫を起こした大出水である。

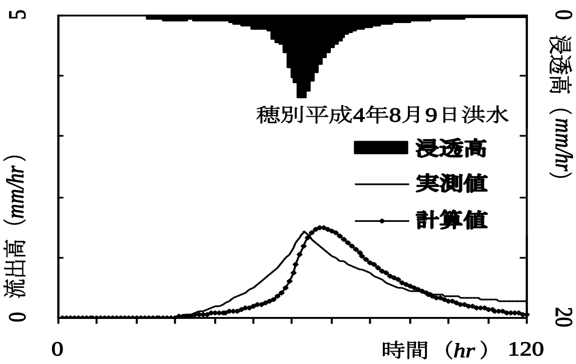
図―3～図―5 にそれぞれ、表面流出成分、中間流出成分、基底流出成分に対応した計算結果を示す。タンクの構成は①、②、④の直列三段タンクモデルである。

図―3 では降雨のピークと流出高のピークが一致しているが、実測値では 4 時間のピーク差がある。すなわち、意図的に降雨量を 4 時間ずらしている [6]。この操作は直列の複数タンクモデルでは、流出ピークの時間遅れを下部タンクと側方流出孔高さで表現するが、単一のタンクでは時間遅れを表現することが不可能であることに起因する。木村の貯留関数法においても、貯留高・流出高曲線（S～Q 曲線）の二価性を解消するために遅滞時間が導入されているが、物理的意味がないと評価されている。本研究でも物理的意味を現段階では明らかにすることは出来ないが、タンクモデルでは河道効果を表現できないことから、ピーク時間を一致させる意味は河道の伝播過程を無視したものと解釈できる。

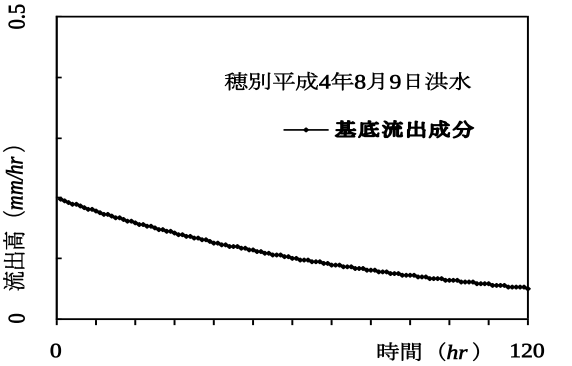
図―4 は中間流出成分の計算結果であるが、入力値はタンク①からの浸透高である。図―3 と同様にピーク差をなくするため、入力を 17 時間遅らせている。図―5 は基底流出成分を表し、逓減係数は 0.0189 である。



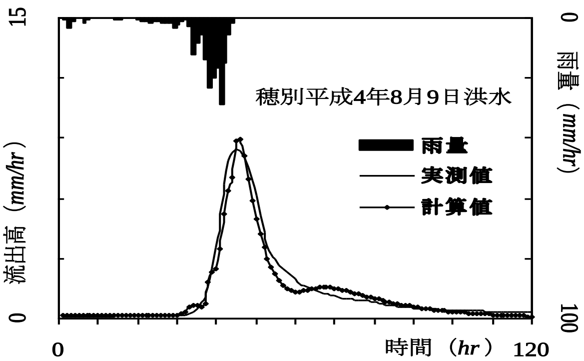
図―3　タンク①計算結果（表面流出成分）



図―4　タンク②計算結果（中間流出成分）

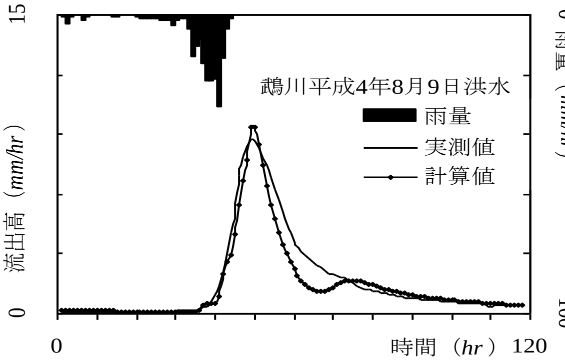


図―5　タンク④計算結果（基底流出成分）

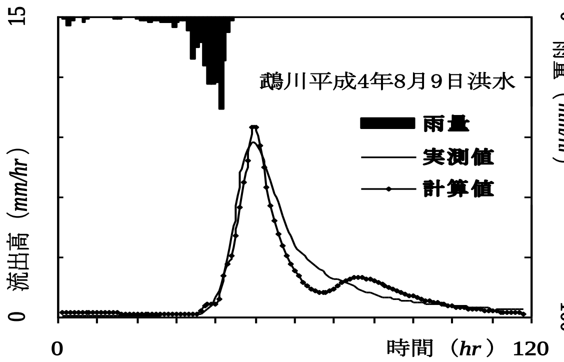


図―6　流出計算結果（穂別地点）

各流出成分の計算結果を足し合わせたものが図―6 である。次に、基準地点が鵡川町の計算結果を図－7～図―8 に示す。流域面積は 1228.0（km^2）であり、入力値を最上段のタンクでは 8 時間、2 段目タンクでは 22 時間遅らせており、逓減係数は 0.0182 である。



図―7　流出計算結果（鵡川地点）



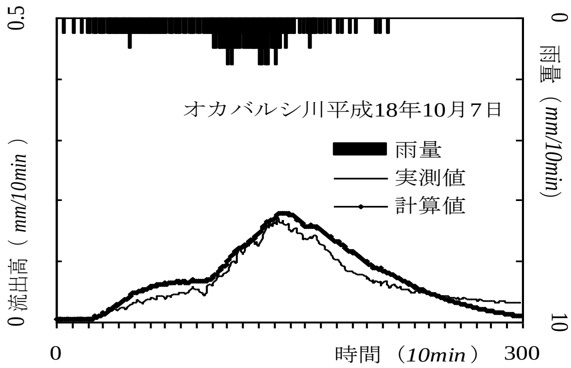
図―8　流出計算結果（鵡川地点）

図―7 のタンク構成は①、②、②、図―8 のタンク構成は①、②、④の直列三段タンクモデルである。

最下段のタンクを④にした場合、すなわち、逓減係数を利用して流出成分を分離した方が計算精度は向上している。また、収束性も向上していることを付記する。

小流域での流出解析結果を図―9 に示す。対象流域は豊平川支流のオカバルシ川である。流域面積は 3.42（km^2）でほぼ全域が自然林となっている。タンクの構成は②、④とした。なお、小流域であり降雨と流出量のピーク差は 30 分程であることから、入力の遅れ操作は行っていない。また、図に示していないがタンク②のみでの解析も行っており、計算精度、収束性共に基底流出成分を考慮した方が向上していることを確認している。

このように小流域では、流出過程が 2 段程度のタンクで構成されていると思われる。



図―9　小流域における解析結果

8. 結論

1）構造の異なる 4 種類のタンクの未知定数をニュートン法により最適化する手法を構築した。

2）未知定数を理論的に確定値とする工夫を行い、側方流出孔高さを浸透孔係数で表すことができた。

3）流出の流出成分ごとに単一のタンクを対応させて流出解析を行い、良好な結果を得た。

4）流出解析の際、大流域において遅延時間を導入せざるを得なかったが、小流域ではその必要はなかった。入力の遅延は河道効果に起因すると思われるが、今後の検討が必要である。

5）大流域では直列三段タンクモデル、小流域では直列二段タンクモデルで流出過程を表現することができた。また、同じタンク段数でも最適なタンク構造でモデルを構成すると計算精度、収束性が向上する。このように、流域ごとに構成を変えることで流出計算を改善できることがわかった。

6）流出成分の分離法は、いわゆるハイドログラフ立上がり点と第二折曲点を直線で結ぶ分離法を採用したが、逓減係数を利用して基底流出成分を分離した方が本解析手法では優れていることがわかった。

なお、今後さらに解析例を増やし、入力を遅延させる原因を明らかにすると共に、流域の違いによる適切なモデル構成を明らかにしていきたい。

9. 参考文献

1）永井明博、角屋睦：タンクモデルの最適同定法に関する基礎的検討、京大防災研究所年報、第 23 号 B-2,pp.239-247,1980.

2）L.S.Diniz , R.S.S.Gois , V.S.Srinivasan:Application of a genetic algorithm for calibration and structural modification of Tank Model, Hydraulic Engineering Software VI,pp.11-20,1996.

3）吉川秀夫、砂田慶吾、グエン・ソン・フン：洪水流量逓減曲線の特性を考慮した流出モデルに関する研究、土木学会論文報告集、第 283 号,pp.23-32, 1979.

4）北海道開発局開発土木研究所、若手水文学研究会：現場のための水文学,1994.

5）嵯峨浩：流出解析モデルと計算手法、第 40 回水工学に関する夏期研修会講義集,pp.A-1-1－A-1-20,2004.

6）川谷健、斉藤雅彦、エマヌエル・アサレ・ポアフ：短期出水予測を目的とするタンクモデルの同定に関する研究、神戸大学都市安全研究センター研究報告第 2 号,pp.83-95,1998.

7）H.Saga , K.Hosi:Optimization algorithm of parameters in the Tank model , Hydraulic Engineering Software VI,pp.21-27,1996.

8）永井明博、角屋睦、中嶋章雅、鈴木克英：長期流出タンクモデルの実用的同定法とその考察、京大防災研究所年報、第 23 号 B-2,pp.249-261,1980.

9）野口正人、小林高昌、山本隆洋：流出タンクモデルの同定に関する研究、長崎大学工学部研究報告第 17 号,pp.93-98,1981.