密度界面に発生する ship wave の物理機構

The physical mechanism of ship wave on the density interface

北海道大学工学部　〇学生員　北野慈和(Yoshikazu Kitano)
北海道大学大学院工学院准教授　正員　山田朋人(Tomohito Yamada)
北海道大学大学院工学院教授　正員　泉典洋(Norihiro Izumi)

1. はじめに

線状に発達し長時間留まることで知られているテーパリングクラウドの物理的なメカニズムは現在でも正確にはわかっていない。このテーパリングクラウドの発生条件･発達過程の詳細を解明することができれば、数値気象モデルの精度が向上し、集中豪雨に対する防災という面で工学的に有意義な発見になると予想される。本研究は、大気を仮定した様々な密度成層場において、理論式からテーパリングクラウドの発達条件・形状を明らかにしていくことを目標とする。

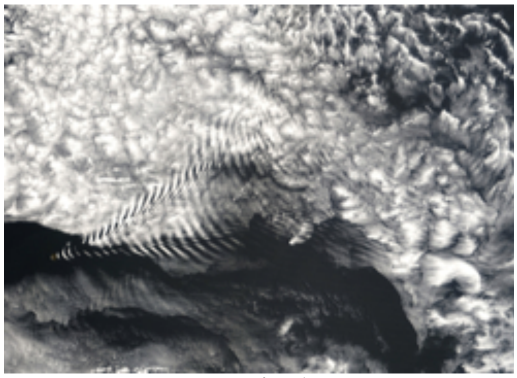
テーパリングクラウドは大気中になんらかの擾乱が連続的に与えられる事により生じ、擾乱源から線状に発達し雨を降らせる。解明すべき点としては、I.擾乱源は何であるのか、II.擾乱が発達する不安定な場とはどのような場なのか、III.どのような形状に雲が発達するのか、等が考えられ、第 1 段階として II に関する研究を理論的なアプローチから行うこととした。擾乱源を密度成層場に与える現象には、船が海面を移動する際に形成される ship wave の理論があり、この理論をテーパリングクラウドに応用していくこととする。ship wave の理論を用いて線状降水帯の議論を行うという方針を立てた経緯は「2. 衛星画像からの考察」で述べる。

ship wave は Kelvin(1891)により初めて理論的に説明されたことから Kelvin 波とも呼ばれる[1)]。Kelvin は深水波としての ship wave を停留位相の方法を用いて説明した。その後、Havelock(1935)[2)]は有限の深さを持つ水面における ship wave の形状を説明し、Lighthill(1957)[3)]は幾何学的な方法で ship wave の説明を行った。

また、ship wave は大気中の密度成層場においても lee wave として観察することが出来る（図-1 アムステルダム島参照)。lee wave としての ship wave は Sharman and Wurtele(1983)[4)]、Sharman and Wurtele(2003)[5)]などにより取り上げられている。

2. 衛星画像からの考察

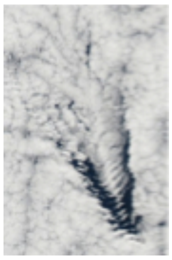
テーパリングクラウドのように大気中の密度成層場に擾乱が連続的に与えられ、雲が形成される現象について調べてみた結果、lee wave としての ship wave があることがわかった。そこで、lee wave の衛星画像



2005.12.19 アムステルダム島

クローゼット諸島

2004.1.27 サウスサンドウィッチ諸島



2011.5.9 ファンフェルナンデス島

図-1 様々な形状をとる lee wave[6)]

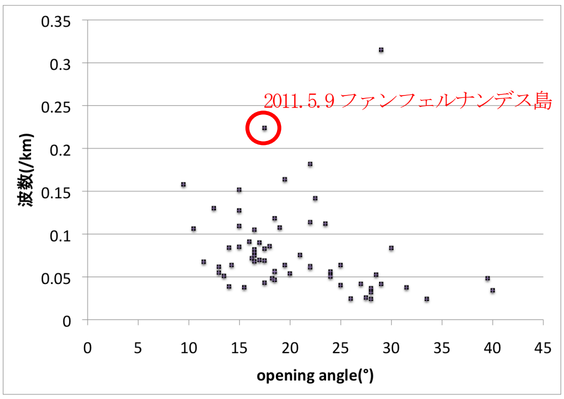


図-2 調査した 65 事例の opening angle-波数のプロット

65 例を調査したところ、様々な波数と opening angle を持つ ship wave が見つかった(図-2 参照)(ここでは、opening angle を擾乱源からくさび状に広がる波領域の

角度の 1/2 として定義している)。おおむね opening angle は 10° ～40° の範囲に、波数も 0.2/km 以下に分布することが分かる。また、lee wave の中には、テーパリングクラウドのようにくさび状に広がる擾乱域の中心部において線上に雲が発達する事例が 2 例見つかった(図-1 ファンフェルナンデス島参照)。

テーパリングクラウドは別名にんじん状の雲と呼ばれることもあり[7]、ship wave と同様に水平方向に三角形状に発達する。また、テーパリングクラウドは擾乱源が地形性のものだけではなく海上にも形成するという点で lee wave と異なっているものの、連続的に何らかの擾乱が与えられ線上に発達するという点では lee wave としての ship wave と非常に似ている。このような観察から、ship wave の理論からアプローチし、テーパリングクラウドの形成を説明していくという方針をたてるに至った。

3. 理論

ship wave の理論をもとに、本研究ではある擾乱を密度成層場に与え、その擾乱がどのように普及していくのかを調べていく。密度成層場は流速を区分的線形近似で表現し、密度を各区分（層）で定数として与えることで表現する。その結果、各層で密度が可変の分散関係式を形成する事が出来る。また、擾乱の普及域は停留位相法を用い、十分に時間が経った場での擾乱の形を見ることとする。

本理論では、変数（3 方向の流速、密度、圧力）は密度成層を仮定した基本場と擾乱とに分けて考える。

$U, P, \bar{\rho}$ が基本場における変数を、u,v,w,p, ρ が擾乱による変数を表す。

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{x 方向流速：} & U(z)+u \\
\text{y 方向流速：} & v \\
\text{z 方向流速：} & w \\
\text{圧力：} & P(z)+p \\
\text{密度：} & \bar{\rho}(z)+\rho
\end{array}\right\} \cdots(1)
$$

流れ方向は x 方向であり、重力加速度 g は z の負の方向に働く。基本場は図-3 のように設定し（現時点では、基本場は z による任意の関数である。区分的線形近似は(9)式で与えられる）、かつ擾乱項は、

$$
\begin{aligned}
u &= \tilde{u}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)} \\
v &= \tilde{v}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)} \\
w &= \tilde{w}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)} \quad \cdots(2) \\
p &= \tilde{p}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)} \\
\rho &= \tilde{\rho}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)}
\end{aligned}
$$

であるとする。ここで、α は x 方向の波数、β は y 方向の波数、c は波速であり、$\alpha c=\omega$ として周波数 ω を定義する。これら擾乱項は十分に微少であるとし、微少項の 2 乗以上の項は無視できるものとする。このとき、ナビエ-ストークス式は

$$
\bar{\rho}\frac{D(U(z)+u)}{Dt} = -\frac{\partial(P(z)+p)}{\partial x} \quad \cdots(3)
$$

$$
\bar{\rho}\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial(P(z)+p)}{\partial y} \quad \cdots(4)
$$

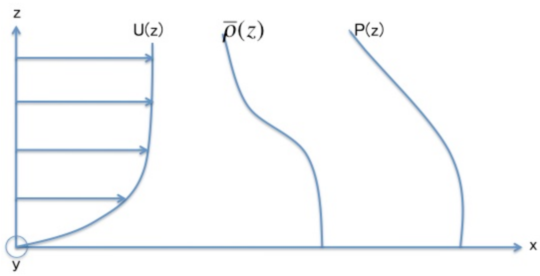


図-3 任意の基本場

$$
\bar{\rho}\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial(P(z)+p)}{\partial z} - g(\bar{\rho}(z)+\rho') \quad \cdots(5)
$$

で与えられ、連続式は、

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \cdots(6)
$$

となる。また、流体塊は移動時密度が変化しないという条件、

$$
\frac{D(\bar{\rho}+\rho)}{Dt}=0 \cdots(7)
$$

を取り入れる。以上 5 式が本理論の基礎方程式となる。

(3)～(7)式から静力学平衡を仮定して、微少項の二乗を無視し、u,v,p, ρ を削除すると、

$$
gk^2\bar{\rho}'\frac{\tilde{w}}{\omega-\alpha U} = \alpha\tilde{w}\left[\bar{\rho}U'\right]' + (\omega-\alpha U)\left[\bar{\rho}\tilde{w}'\right]' - \rho\tilde{w}k^2(\omega-\alpha U)\cdots(8)
$$

が得られる。ここで、’は z による偏微分である。基本場圧力 P の項が存在しないことに注意したい。

ここで、具体的な基本場を与える。テーパリングクラウドは境界層上端で発生することを考え、図-4 のように仮定された基本場における解の導出を行う。図-4 の基本場は式で表すと、

$$
\left.\begin{array}{lll}
U_{II}=constant & \rho_{II}=constant & (h<z) \\
U_I=\dfrac{U_{II}}{h}z & \rho_I=constant & (0<z<h)
\end{array}\right. \cdots(9)
$$

となる。添え字の II は h＜z の範囲の層の、添え字 I は 0＜z＜h の範囲の層の値であることを示す。ここで、II 層の流速、各層の密度は定数と置いている。なお境界条件は、

$$
\left.\begin{array}{l}
w=0 \quad at \quad z=\infty \\
w=0 \quad at \quad z=0
\end{array}\right. \cdots(10)
$$

である。このように二層の基本場を仮定したために、z=h において適合条件が二つ必要となる。図 4 のように境界面の z 座標 η を、

$$
\eta=\tilde{\eta}(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\alpha c t)}\cdots(11)
$$

とあらわし、微少な項と考える。η の時間微分は w(z=h)に等しいので、

$$
\begin{aligned}
w(z=h) &= \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z} \\
&\cong \frac{\partial\eta}{\partial t}+U\frac{\partial\eta}{\partial x} \\
&= i\eta(-\omega+\alpha U) \qquad \cdots(12)
\end{aligned}
$$

となる。なお、η は微少であり h と近似でき、(12)式の左辺は各層で一定値をとることがわかる。つまり、

$$
\begin{aligned}
w_I(z=h) &\equiv ih\left(-\omega+\alpha U_{(z=h)}\right) \\
&= ih\left(-\omega+\alpha U_{(z=h)}\right) \equiv w_{II}(z=h) \cdots(13)
\end{aligned}
$$

したがって、二層の適合条件の一つ目として、

$$
w_{II}=w_I \quad at \quad t=h\cdots(14)
$$

が得られる。

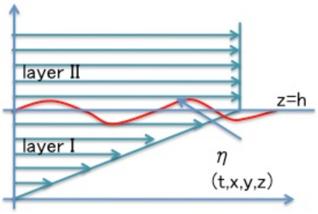


図-4 二層間の境界の評価

また、(8)式を h-ε から h+ε まで積分し、ε→0 を評価すると、

$$\left[gk^2\bar{\rho}\frac{\tilde{w}}{\omega-\alpha U}-\alpha\bar{\rho}U'\tilde{w}+(\omega-\alpha U)\bar{\rho}w'\right]_{II-I}=0 \quad at \quad z=h \cdots(15)$$

が得られる。ただし、$[]_{II-I}$ は括弧内の値の二層間の差を表す。これが二つ目の適合条件となる。なお、仮定している基本場では $\bar{\rho}'=0$、$U''=0$ であることを考慮すると、(8)式は、

$$\frac{d^2\tilde{w}}{dz^2}-k^2\tilde{w}=0\cdots(16)$$

となり、一般解は

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{II}&=Ae^{-kz}+Be^{kz}\\ \tilde{w}_{I}&=Ce^{-kz}+De^{kz}\end{aligned}\cdots(17)$$

となる。二つの適合条件、二つの境界条件を用い、この一般解の定数を削除すると以下の分散関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\omega=&\frac{1}{2hk\left((e^{2hk}+1)\rho_I+(e^{2hk}-1)\rho_{II}\right)}\Big(\alpha\rho_I\rho_{II}-\alpha e^{2hk}\rho_I U_{II}+2\alpha(1+e^{2hk})hk\rho_I U_{II}-2\alpha e^{2hk}hk\rho_{II}U_{II}\\ &\pm\sqrt{e^{2hk}-1}\sqrt{4(e^{2hk}+1)gh^2k^3\rho_I{}^2-8gh^2k^3\rho_I\rho_{II}-4(e^{2hk}-1)gh^2k^3\rho_{II}+\alpha^2(e^{2hk}-1)\rho_I{}^2\rho_{II}{}^2}\Big)\end{aligned}$$

$$\cdots(18)$$

$\omega=c\alpha$ より波速を計算すると、

$$\begin{aligned}c(k)=&\frac{1}{2hk\left(\Delta\rho\left(e^{2hk}-1\right)+2e^{2hk}\rho_I\right)}\\ &\left(\begin{aligned}&U_{II}\left(-2\Delta\rho hk+\rho_I\right)+e^{2hk}U_{II}\left(-\rho_I+2hk\left(\Delta\rho+2\rho_I\right)\right)\\ &\quad\pm\sqrt{2}\sec(\theta)\sqrt{\left(1-e^{hk}\right)\left(1+e^{hk}\right)\left(\left(1-e^{2hk}\right)U_{II}{}^2\rho_I{}^2\left(1+\cos(2\theta)\right)+8gh^2k\left(\left(e^{2hk}-1\right)\Delta\rho^2+2\Delta\rho e^{2hk}\rho_I\right)\right)}\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

$$\cdots(19)$$

を得る。ただし、$\Delta\rho=\rho_{II}-\rho_I$ であり、θ を波の方向として $\alpha=k\cos(\theta)$, $\beta=k\sin(\theta)$ で定義している。

得られた分散関係式からもわかるように、与えられた擾乱は波数に対して様々な波速を有する。このことより、すべての波数を重ね合わせてはじめて擾乱を表現できることがわかる。擾乱の重ね合わせはフーリエ積分に対応する。

$$\begin{aligned}w(x,y,z,t)&=\frac{1}{4\pi^2}\iint\tilde{w}e^{i\psi t}d\alpha d\beta\\ \psi&=(\alpha\frac{x}{t}+\beta\frac{y}{t}-\omega)\end{aligned}\cdots(20)$$

この積分を解くことは出来ないが、停留位相法を用いて議論していくことにより物理的に意味のある解を求めることが出来る。オイラーの公式より、(20)式は

$$w(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\tilde{w}\left(\cos(i\psi t)+i\sin(i\psi t)\right)d\alpha d\beta\cdots(21)$$

とあらわせられ、被積分関数は振動関数であることがわかる。ここで、$\tilde{w}$ は振幅に相当するが、α、β の変化に伴って、$\tilde{w}$ がゆっくりと大きさを変え振動部 $e^{i\phi t}$ が急速に振動する場合、この積分は値を打ち消し合うことになる。本件においても、時間 t が十分大きく、非積分関数は α、β の値の多くで打ち消し合うものとして考える。この打ち消し合いの度合いが相対的に少ない波数は以下の式で与えられる（この式を満たす変数 α, β のみで議論を行う方法を停留位相法という）。

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=0 \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta}=0\cdots(22)$$

(22)式を解くと、

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}(\alpha_0,\beta_0)=\frac{x}{t} \quad \frac{\partial\omega}{\partial\beta}(\alpha_0,\beta_0)=\frac{y}{t}\cdots(23)$$

が得られ、ある時間 t における、座標(x,y)において有意となる波の波数(α_0, β_0)は(23)式で与えられる事となる。なお、上式(23)左辺は群速度を表しており、無数の波数を重ね合わせた擾乱は、打ち消し合った末に群速度として残ることが確認できる。

(23)式左辺についてそれぞれ解いてみると、

$$\begin{aligned}\frac{x}{t}&=\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=\frac{\partial(\alpha c)}{\partial\alpha}=c+\frac{\alpha^2}{k}\frac{\partial c}{\partial k}=c+(\cos(2\theta)+1)\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\\ \frac{y}{t}&=\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=\frac{\partial(\alpha c)}{\partial\beta}=\frac{\alpha\beta}{k}\frac{\partial c}{\partial k}=\sin(2\theta)\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\end{aligned}\cdots(24)$$

となる。さらに(24)式から θ を削除すると、

$$\left(\frac{x}{t}-c-\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2=\left(\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\right)^2\cdots(25)$$

が得られる。(25)式は k の値に応じて群速度(x/t-y/t)平面に円をプロットする。円の半径、中心の x 座標はそれぞれ

$$\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\cdots(26)$$

$$c+\frac{k}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\cdots(27)$$

で与えられ、k の値を変化させながらプロットすることにより円群が得られる。この円群のプロットできる範囲内にのみ群速度が存在することを(25)式は説明している。

ただし上式(25)を使用するには注意点がある。上式には波の方向 θ に関する値について議論していない。波速(19)式において、θ は√の項にのみ存在している。√内部が正となり、物理的に意味のある波速 c の実部に θ が存在する場合、(19)式より 1/cos(θ)の値を持つ項が生じ、結果として、cos(θ)→0 において c が無限値をとる。結果、波数 c と c の傾きで与えられる(25)式の円群のプロット領域も無限大に成長する。したがって、θ の値が波速 c に影響しない領域を定式化し、(25)式が利用できる条件を評価しなければならない。

√内部の関数が負の値をとる、つまり、√の項が虚部となり θ の値が波速の実部に関係しないとき、

$$\left(1-e^{hk}\right)\left(1+e^{hk}\right)\left(\left(1-e^{2hk}\right)U_{II}{}^2\rho_I{}^2\left(1+\cos(2\theta)\right)+8gh^2k\left(\left(e^{2hk}-1\right)\Delta\rho^2+2\Delta\rho e^{2hk}\rho_I\right)\right)<0$$

$$\cdots(28)$$

の不等式が満たされる。(28)式は、k,h＞0 であることを考慮すると、

$$\underbrace{\left(1-e^{hk}\right)}_{negative}\underbrace{\left(1+e^{hk}\right)}_{positive}\left(\left(1-e^{2hk}\right)U_{II}{}^{2}\rho_{I}{}^{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)+8gh^{2}k\left(\left(e^{2hk}-1\right)\Delta\rho^{2}+2\Delta\rho e^{2hk}\rho_{I}\right)\right)<0$$

$$\Rightarrow\left(\left(1-e^{2hk}\right)U_{II}{}^{2}\rho_{I}{}^{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)+8gh^{2}k\left(\left(e^{2hk}-1\right)\Delta\rho^{2}+2\Delta\rho e^{2hk}\rho_{I}\right)\right)>0 \quad \cdots(29)$$

となる。

いま、この条件式(29)が θ の値に関わらず成り立つときの基本場のパラメータ（$h, U_{II}, \rho_I, \Delta\rho$）の条件式を導きたい。$\Delta\rho$ について考えると、上式は $\Delta\rho$ の二次不等式であると見なせる。$\Delta\rho$ について解くと、

$$\Delta\rho<\frac{-2ghke^{2hk}\rho_{I}-\rho_{I}\sqrt{4g^{2}h^{2}k^{2}e^{4hk}+\frac{1}{2}gk\left(e^{2hk}-1\right)^{2}U_{II}{}^{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)}}{2ghk\left(e^{2hk}-1\right)},$$
$$\frac{-2ghke^{2hk}\rho_{I}+\rho_{I}\sqrt{4g^{2}h^{2}k^{2}e^{4hk}+\frac{1}{2}gk\left(e^{2hk}-1\right)^{2}U_{II}{}^{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)}}{2ghk\left(e^{2hk}-1\right)}<\Delta\rho \quad \cdots(30)$$

となるが、全ての θ の値に対して成立する $\Delta\rho$ の範囲は、$\theta=0, \pi$ の時で、

$$\Delta\rho<\frac{-2ghke^{2hk}\rho_{I}-\rho_{I}\sqrt{4g^{2}h^{2}k^{2}e^{4hk}+gk\left(e^{2hk}-1\right)^{2}U_{II}{}^{2}}}{2ghk\left(e^{2hk}-1\right)},$$
$$\frac{-2ghke^{2hk}\rho_{I}+\rho_{I}\sqrt{4g^{2}h^{2}k^{2}e^{4hk}+gk\left(e^{2hk}-1\right)^{2}U_{II}{}^{2}}}{2ghk\left(e^{2hk}-1\right)}<\Delta\rho \quad \cdots(31)$$

である。しかし、$\rho_{II}=\rho_I+\Delta\rho>0$ であるので、

$$\frac{-2ghke^{2hk}\rho_{I}+\rho_{I}\sqrt{4g^{2}h^{2}k^{2}e^{4hk}+gk\left(e^{2hk}-1\right)^{2}U_{II}{}^{2}}}{2ghk\left(e^{2hk}-1\right)}<\Delta\rho \cdots(32)$$

の式のみが残る。この条件式が成り立つ時、c[k]の実数部は一つだけの解を有し、θ の値に影響しない。なお、(32)式左辺は k について減少関数であり、k→0 における左辺の値が $\Delta\rho$ を制限すると考えて良い。

4. 結果

この条件式(32)を満たす波数、波速の関係、円群の一例を図-5 に記す。（ρ_I=1.3[kg/m^3], $\Delta\rho$ =0.1[kg/m^3], U_{II}=10[m/s], g=9.8[kg m/s^2], h=1500[m]として図-5 を求めた。）(25)式左辺の k→0 の値は 0.00221[kg/m^3]であり、$\Delta\rho$ は条件を満たすことが確認できる。

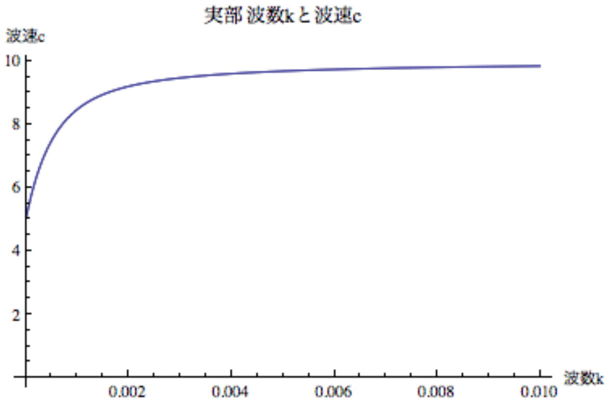
この円群は、停留位相法によって打ち消し合う擾乱を除いた結果残る波速の存在範囲を示す。つまり、図-５の円群に任意の t[s]を掛けることにより、時間 t[s]における擾乱の存在範囲が計算できる。

条件式(25)を満たす基本場を与えた他の例においても、図-5 に示すようなしずく状の擾乱域が得られることが分かった。また、擾乱域は時間 t[s]に対してしずく状を保ったまま拡大していくことも分かった。

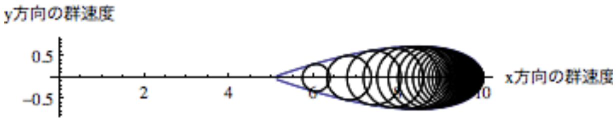
5. 今後の予定

(32)式を仮定した(25)式は、ある擾乱を密度成層場に一つ与えた結果、それが任意の時間 t[s]でどのような存在範囲を有するかを示した。しかし、実際のテーパリングクラウドは、擾乱が連続的に与えられる事によって、線状に発達する。よって、この理論においても擾乱を連続的に与えることが肝要であり今後の目標となる。

また、本理論では擾乱の振幅については議論していない。擾乱の大きい領域がテーパリングクラウドの降水域と見なせることが予想できるため、振幅の議論も不可欠である。振幅は(23)式に時間 t と座標(x,y)を与えることによって得られる(α_0, β_0)の組みを、(20)式を近似して得られる擾乱に導入することで得られる事が



横軸:c[m/s]
縦軸:k[/m]



横軸:x 方向の群速度[m/s]
縦軸:y 方向の群速度[m/s]

図-5 波数-波速の関係、群速度の範囲（上層が重い不安定大気を過程）単位は SI 単位系で与える。(ρ_I=1.3[kg/m^3], $\Delta\rho$ =0.1[kg/m^3], (25)式左辺の k→0 の値：0.00221[kg/m^3], U_{II}=10[m/s], g=9.8[kg m/s^2], h=1500[m])

予想される。今後の課題としていきたい。

6. 参考文献・参考資料

1) Kelvin Loed, 1910:Mathematical and Physical Papers vol.IV
2) T. H. Havelock,1908: The Propagation of Groups of Waves in Dispersive Media, with Application to Waves on Water Produced by a Travelling Disturbance,Proceedings of the Royal Society
3) M. J. Lighthill,1957:River waves, Symposium on Naval Hydrodynamics
4) R. D. Sharman and M. G. Wurtele, 1983:Ship waves and Lee waves, Journal of the Atmospheric Sciences
5) R.D.Sharman and M. G. Wurtele, 2003: Three-Dimensional Structure of Forced Gravity Waves and lee Waves, Journal of the Atmospheric Sciences
6) NASA/MODIS:衛星画像
7) 小倉義光・新野宏,2006: お天気の見方・楽しみ方(6) 謎に満ちた不意打ち集中豪雨-2004 年 6 月 30 日静岡豪雨の場合(その 2),天気 Vol.53,No.10
8) 小倉義光,1997：メソ気象の基礎理論,東京大学出版
9) Peter J. Schmid and Dan S. Henningson, 2000:Stability and Transition in Shear Flows,Applied Mathematical Sciences 142