

内部に弾性体を有する球殻における非軸対称座屈変形の解析

analysis of non-axisymmetric buckling modes

in complete spherical shells with internal elastic body

北海道大学大学院工学院

北海道大学工学部

北海道大学大学院工学院

北海道大学大学院工学院

○学生員 水口翼 (Tsubasa Mizuguchi)

学生員 小西善晃 (Yoshiteru Konishi)

学生員 関澤貴史 (Takahumi Sekizawa)

正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

本研究で取り扱うシェルはその優れた構造特性から、工業製品、建築物などの人工物はもちろんのこと、野菜や果物など自然界においても非常に多く存在している汎用性の高い構造形式であるといえる。これらの構造にかかる荷重が臨界点(座屈荷重)に達すると構造の状態は座屈後平衡状態へと移行するが、内部または外部に弾性体を有するなど特殊な抵抗力が働く構造を持つシェルについては、復元力などさまざまな要因により座屈変形モードが特異な波状座屈になる可能性があることがわかっていく。その特異な座屈変形に関して、一方向に抵抗力を持つばねを有するモデルを用いた過去の研究では、軸対称の座屈変形形状のみがみられた。本研究では非軸対称の座屈変形についても表現できるモデルとして、全方向に抵抗力を持つ弾性体を有する球殻を想定し、座屈時に球殻がどのような変形を起こすのかについて変分法を用いて解析を行った。また球殻の強度・内部の弾性体の抵抗力など諸条件の違いによって座屈強度はどのように変わってくるのか、座屈変形したときの球殻の形状にどのような違いが起こるのかについても解析を行った。

2. 解析モデル

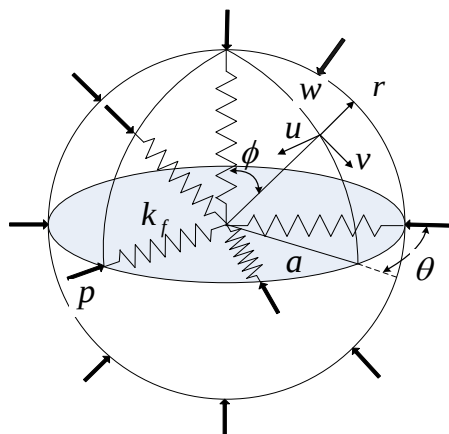


図1 解析モデル

図1は解析対象とする Winkler Foundation を有する球シェルのモデル図を示したものである。ヤング係数 E 、半径 a 、厚さ h 、ポアソン比 ν の球シェルの内部にバネ剛性 k_f の半径方向のみの抵抗力(Winkler Foundation)が作用する。本研究では内部に弾性体を有する球殻を想定しているが、弾性体は本来あらゆる方向の圧力から影響を受ける抵抗力を持つため、全方向から影響を受けるバネ剛性 k_f として定式化し解析を進めた。

3. 変分法による解析理論

構造物について、ある変位 x_0 のときの釣合・安定な

どの状態を調べるために、変位が x_0 から x_1 に微小変化したときの力学的エネルギー変化 ΔU を考える。この場合 ΔU は以下のように表わせる。

$$\Delta U = U(x_0 + x_1) - U(x_0) \quad (1)$$

この式に Taylor 展開を行うことで次式が得られる。

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U + \frac{1}{3!} \delta^3 U + \dots \quad (2)$$

ここでは球殻が座屈状態にあることを想定しているが、このときエネルギーは不安定状態にある。言い換えると座屈状態では、力学的エネルギーが最小値をとる安定状態になることが起こり得ないため、その一次導関数が0かつ二次導関数が負の値をとらないということがいえる。このことから、座屈時は以下の条件を適用できる。

$$U'(x_0) \geq 0 \quad (3)$$

これより座屈状態における力学的エネルギーの条件が以下のように得られ、これに従って座屈時の球殻の弾性座屈荷重と変位を導出する。

$$\delta(\delta^2 U) = 0 \quad (4)$$

4. エネルギーの定式化

球殻の全力学的エネルギー U は、伸びによるエネルギー U_M と曲げによるエネルギー U_B 、外圧力 p によるエネルギー Ω 、Winkler foundation によるエネルギー U_F の和として以下の形で与えられる。

$$U = U_M + U_B + \Omega + U_F \quad (5)$$

$$U_M = \frac{C}{2} \int_A \left(\varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_\phi \varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\phi\theta}^2 \right) dA \quad (6)$$

$$U_B = \frac{D}{2} \int_A \left[\chi_\phi^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu \chi_\phi \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{\phi\theta}^2 \right] dA \quad (7)$$

$$\Omega = - \int_A p w dA \quad (8)$$

$$U_F = \frac{k_f}{2} \int_A w^2 dA \quad (9)$$

ここにおいて $\varepsilon, \gamma, \chi$ はそれぞれ伸び、せん断、曲げに関するひずみであり、 C, D はそれぞれ伸び、曲げの剛性に関する係数である。

上記より得られたエネルギーに変分原理を適用することによって座屈現象に対応する支配方程式を得ることができる¹⁾。その支配方程式に対し、座屈後の変位を座屈形状の波数 n, m を用いて表し、固有値を解くことによって弾性座屈荷重と座屈変形後の変位を求める²⁾。

5. ばね剛性の定式化

エネルギー式において、シェルが内部に弾性体を有するモデルを想定し、 w 方向のみではなく全方向の力から影響を受ける Winkler foundation のばね剛性 k_f を表現していく。

k_f を導出するためには、内部に弾性体を有するシェルについて応力式・変位式を求める必要があり、その応力と変位の関係を導くことでばね剛性 k_f を定式化した。ここで、内部に弾性体を有するシェルの変位式については以下のように表すことができる³⁾。

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} C_{11}^{(mn)} r^{n+1} V_{nm} + C_{21}^{(mn)} r^n X_{nm} + \left[\frac{2n+3}{2} \frac{B_{(n)}}{C_{(n)}} C_{11}^{(mn)} r^{n+1} + C_{32}^{(mn)} r^{n-1} \right] W_{nm} \quad (10)$$

式中での関数 V_{nm} , X_{nm} , W_{nm} は次のように表される。

$$V_{nm} = -\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} Y_n^m e_r + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_\theta + \frac{im}{\sqrt{(n+1)(2n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_\phi \quad (11)$$

$$X_{nm} = 0 - \frac{m}{\sqrt{n(n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_\theta - \frac{i}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_\phi \quad (12)$$

$$W_{nm} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} Y_n^m e_r + \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} e_\theta + \frac{im}{\sqrt{n(2n+1)} \sin \theta} Y_n^m e_\phi \quad (13)$$

ここでの Y_n^m は球面調和関数で、3次元のラプラス方程式の解を球座標で表したときの角度部分の関数である。また式において、 $C_{ij}^{(nm)}$ は座屈波数 m, n に関する定数であり、 $B(n)$ と $C(n)$ については以下のように表される。

$$B_{(n)} = \frac{(\lambda + \mu) \sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \quad C_{(n)} = \frac{n\lambda + \mu(3n+1)}{2n+1} \quad (15)$$

ここにおいて μ, λ はラメ定数であり、弾性体のヤング係数 E_e とポアソン比 ν_e からなるパラメータである。次に、応力については以下のように表わすことができる。

$$\frac{\sigma_{rr}^{(nm)}}{2G} = \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \frac{(n+1)m(n^2 - n - 2 - 2/m)}{2[m(3n+1) - 2(2n+1)]} C_{11}^{(nm)} r^n Y_n^m + \frac{n(n-1)}{\sqrt{n(2n+1)}} C_{32}^{(nm)} r^{n-2} Y_n^m \quad (16)$$

式中での G はせん断弾性係数を表す。これらの式から、変位式において r 方向にのみ1単位の変位が起こると仮定し $C_{ij}^{(nm)}$ の値を求め、それを応力式に適用することで弾性体の挙動を想定したばね剛性 k_f の値を求めた。得られた k_f 式は以下の形をとった。

$$k_f = \left[\frac{(1+n)(-2-2m-mn+m^2n)}{-2+m(1+3n)} + \frac{(-1+n)(2\sqrt{n}C_{(n)} + \sqrt{n+1}(3+2n)B_{(n)})\sqrt{n}}{(1+2n)C_{(n)}} \right] \frac{G}{r} \quad (17)$$

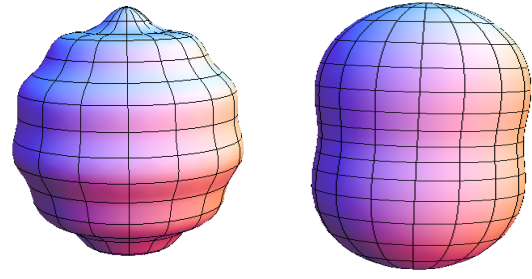


図1 球殻の座屈時の形状と座屈波数

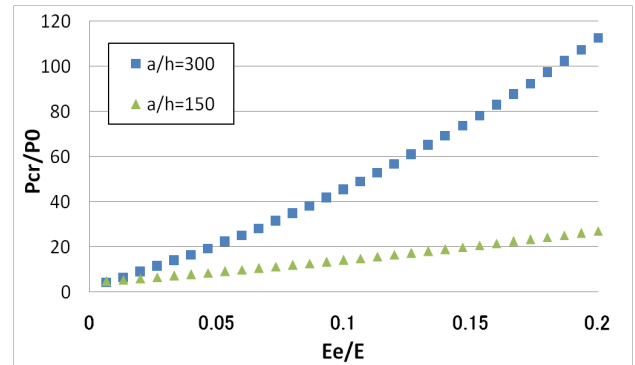


図2 ヤング係数比と肉厚比に対する座屈荷重

5. 解析結果

図1は、座屈時の球殻の形状を表したものである。弾性体のヤング係数が小さい段階では m 方向のみの波状座屈である軸対称の変形が起こったが、弾性体の抵抗が大きい状態においては m, n 両方向の座屈である非軸対称の変形がみられた。

図2は、球殻と弾性体のヤング係数比 E_e/E および肉厚比 a/h に対応する座屈荷重比 P_{cr}/P_0 を示したものである。ここで無次元化に用いた座屈荷重 P_0 は Timoshenko による古典座屈荷重である⁴⁾。図2より、ヤング係数比と肉厚比の増加にともなって座屈荷重比が増加することがわかる。

6. まとめ

本研究によって、以下の知見が得られた。

- ・内部に弾性体を有するモデルでも軸対称の座屈形状は見られるが、弾性体の抵抗が大きい場合には非軸対称の座屈変形が起こる。
- ・球シェルの座屈荷重はヤング係数比と肉厚比に依存し、それぞれが大きいほどその座屈荷重も大きくなる。

参考文献

- 1) M.Sato, M.A.Wadee, T.Sekizawa, K.Iiboshi, and H. Shima: Hydrostatically pressurized buckling of complete spherical shells filled with an elastic medium, 土木学会論文集 A2 (応用力学) Vol.67,
- 2) W.Flugge, Stress in shells Second Edition, Springer-Verlag, Berlin(1962).
- 3) H. B. McClung: The elastic sphere under nonsymmetric loading, Journal of Elasticity 21: 1-26, 1989
- 4) S.P. Timoshenko, and J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd Edition McGraw-Hill(1962), 512-517