

## 半径方向復元力を有する弾性体で満たされた球殻構造における軸対称座屈解析

Analysis of axisymmetric buckling modes in complete spherical shells filled with an elastic medium under external pressure

北海道大学工学部 ○学生員 小西善晃 (Yoshiteru Konishi)  
 北海道大学大学院工学院 学生員 関澤貴史 (Takafumi Sekizawa)  
 北海道大学大学院工学院 学生員 水口翼 (Tsubasa Mizuguchi)  
 北海道大学大学院工学研究院 正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

## 1. はじめに

シェルは優れた構造特性により、工業製品や建築物、パイプラインなどの人工物だけでなく、血管や果物など自然界においても多く存在している構造形式である。この構造にかかる荷重が座屈荷重になる時、構造の状態は座屈後平衡状態へと移行する。しかし、弾性体を持つような特殊な構造のシェルについては、復元力などの要因により、座屈モードが特異なものとなることが予想される。この研究ではその特異な座屈モードを解析的に予測することを目的として、球殻を対象にした座屈変形問題に関する解析を行う。球殻は半径方向の抵抗力(Winkler foundation)を有する球として、厳密解法に基づく定式化を行う。また、Rayleigh-Ritz法に基づく近似解法に導出される簡易座屈算定式を提示し、その精度を検証する。

## 2. 解析モデル

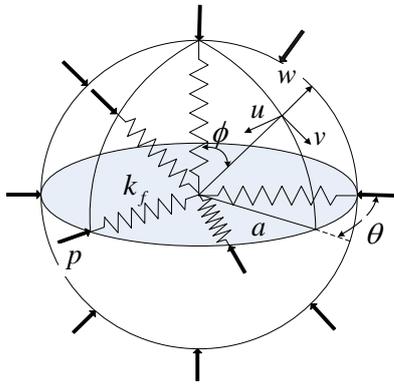


図1 解析モデル

図1は解析対象とする Winkler foundation を有する球殻のモデル図を示したものである。ヤング係数  $E$ 、半径  $a$ 、厚さ  $h$ 、ポアソン比  $\nu$  の球殻の内部にバネ剛性  $k_f$  の半径方向抵抗力(Winkler foundation)が作用する。

また、近似解法によるアプローチを行う際には同じ球殻のモデルを考慮するのに加えて、初めから軸対称変形を仮定し、伸びなし変形を考慮して座屈解析を行う。このとき接線方向の成分は一方方向のみに定義され、半径方向  $w$  と接線方向  $v$  の二方向の変位を用いて解析を行っていく。

## 3. 定式化

## 3.1 厳密解法によるアプローチ

この場合の球殻の全ポテンシャルエネルギー  $U$  は、円周方向の伸びによるエネルギー  $U_M$  と曲げによるエネルギー  $U_B$ 、外圧力  $p$  によるエネルギー  $\Omega$ 、Winkler foundation によるエネルギー  $U_F$  の総和として得られ、

以下のように表すことができる。

$$U = U_M + U_B + \Omega + U_F \quad (1)$$

$U_M, U_B, \Omega, U_F$  はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$U_M = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left( \varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_\phi\varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{\phi\theta}^2 \right) dA \quad (2)$$

$$U_B = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A \left[ \chi_\phi^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu\chi_\phi\chi_\theta + 2(1-\nu)\chi_{\phi\theta}^2 \right] dA \quad (3)$$

$$\Omega = - \int_A p w dA \quad (4)$$

$$U_F = \frac{k_f}{2} \int_A w^2 dA \quad (5)$$

ここで、 $\varepsilon_\phi, \varepsilon_\theta$  は伸びに関するひずみ、 $\gamma_{\phi\theta}$  はせん断に関するひずみ、 $\chi_\phi, \chi_\theta$  は曲げに関するひずみ、そして、 $\chi_{\phi\theta}$  はねじれに関するひずみである。

上記の過程によって得られたポテンシャルエネルギーに変分原理を適用することにより、座屈現象に対応する支配方程式を得ることができる。その式に  $\theta$  方向の波数  $n$  と方向  $\phi$  の波数  $m$  を用いて表した座屈時の変位を代入することによって以下の代数方程式が得られる<sup>1)</sup>。

$$\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6)$$

よって座屈荷重は次式のように代数方程式の固有値問題を解くことで得ることができる。

$$\det(\mathbf{V}) = 0 \quad (7)$$

座屈時の変位については以下のような過程で得られる。まず、 $\theta$  方向の座屈時の変位  $u_1, v_1, w_1$  をそれぞれ以下のように仮定する。

$$u_1(\phi, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(\phi) \cos n\theta \quad (8)$$

$$v_1(\phi, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n(\phi) \sin n\theta \quad (9)$$

$$w_1(\phi, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} w_n(\phi) \cos n\theta \quad (10)$$

$\phi$  方向については、以下のように  $\omega_m$  を定義することで  $u_m, v_m$  をまとめることができる。

$$\omega_m(\phi) = \frac{v_m(\phi) \sin \phi + v_m(\phi) \cos \phi + nu_m(\phi)}{\sin \phi} \quad (11)$$

$\phi$  方向の座屈時の変位  $w_m, \omega_m$  についてルジャンドル多項式を用いて解を以下のように仮定する<sup>2)</sup>。

$$w_m(\phi) = \sum_{m=2}^{\infty} W_m P_m(\cos \phi) \quad (12)$$

$$\omega_m(\phi) = \sum_{m=2}^{\infty} \Omega_m P_m(\cos \phi) \quad (13)$$

ここで、 $W_m, \Omega_m$  は仮定した変位の振幅である。

### 3.2 近似解法によるアプローチ

この場合の全ポテンシャルエネルギー  $U$  は伸びによるエネルギー  $U_M$ , 曲げによるひずみエネルギー  $U_B$ , 外圧力  $p$  によるエネルギー  $\Omega$ , そして Winkler foundation によるエネルギー  $U_F$  の総和で得られ, それぞれの項は以下のように表すことができる.

$$U_M = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A (\varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_\phi\varepsilon_\theta) dA \quad (14)$$

$$U_B = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A (\chi_\phi^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu\chi_\phi\chi_\theta) dA \quad (15)$$

$$\Omega = - \int_A p w dA \quad (16)$$

$$U_F = \frac{k_f}{2} \int_A w^2 dA \quad (17)$$

ここで得られた全ポテンシャルエネルギーに変分原理を用いることで支配方程式が得られる. 静的変位を  $w_0$ , 座屈時微小変位をそれぞれ  $w_1, v_1$  とする. 支配方程式を導く際に Rayleigh-Ritz trial function と座屈波数  $n$ , ルジャンドル多項式  $P_n$  を用いて以下のように解の仮定を行う.

$$v_1 = \sqrt{1-\mu^2} \sum_{n=2}^{\infty} V_n P'_n(\mu) \quad (18)$$

$$w_1 = \sum_{n=2}^{\infty} W_n P_n(\mu) \quad (19)$$

ここで

$$\mu = \cos\phi \quad (20)$$

ここでは伸びなし変形を仮定しているため  $\delta U_m = 0$  より  $V_n, W_n$  の関係式が次のように得られる.

$$W_n = -\frac{n(n+1)}{2} V_n \quad (21)$$

この結果を用いて支配方程式から代数方程式が求められ, 固有値問題を解くことで以下の座屈荷重  $P$  が得られる.

$$P = \frac{2Eh + k_f a^2 (1-\nu)}{Eah(n-1)^2 (n+2)^2} \left\{ \frac{2Eh(n-1)(n+2)}{1+\nu} + \frac{Eh^3(n-1)^2 (n+2)^2 [n(n+1) - (1-\nu)] + a^2 k_f n(n+1)}{12a^2 (1-\nu^2)} \right\} \quad (22)$$

### 4. 解析結果

図2はバネの剛性比と厚肉比に対する座屈荷重比とその座屈形状を示したものである. ここで, 座屈荷重  $P_0$  は次に示す Timoshenko による古典座屈荷重である<sup>3)</sup>.

$$P_0 = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \quad (23)$$

図2より, 剛性比と厚肉比の増加に従って座屈荷重比も増加し, 座屈形状は  $\phi$  方向の座屈モード  $m$  のみに依存する軸対称変形となることがわかった.

図3は図2で示される  $h/a=100$  の場合における座屈荷重比と簡易座屈荷重比との比較である. また, 図4は厳密解法に基づく座屈荷重  $P_{cr}(exact)$  と簡易座屈荷重  $P_{cr}(simplified)$  の相対誤差を示したものである. ここで相対誤差は以下のように定義する.

$$\frac{P_{cr}(simplified) - P_{cr}(exact)}{P_{cr}(exact)} \quad (24)$$

これより, バネの剛性比が増加するにしたがって両者の誤差は小さくなっていくことがわかる.

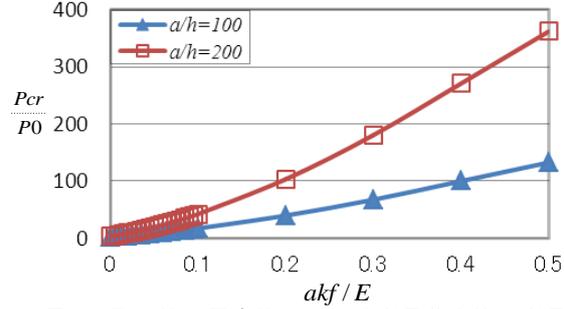
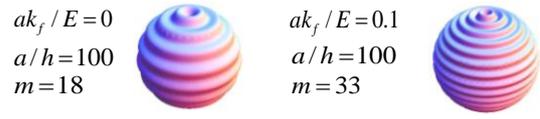


図2 剛性比と厚肉比に対する座屈荷重比と座屈形状

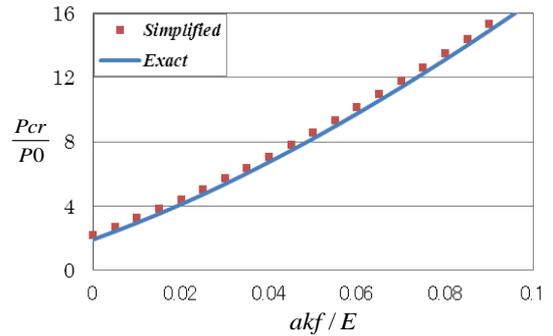


図3 厳密解と簡易解の座屈荷重比による比較

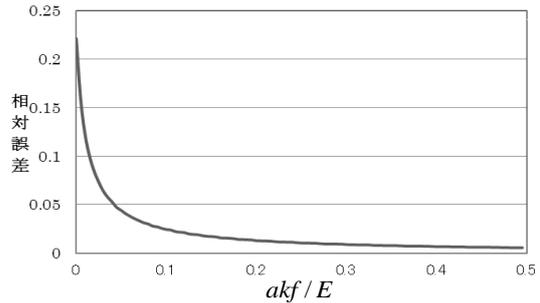


図4 厳密解と簡易解による座屈荷重の相対誤差

### 5. まとめ

本研究から以下の知見が得られた.

- 球殻の座屈荷重と形状は厚肉比と剛性比に依存する.
- 復元力が座屈波数に依存しない, すなわちバネ剛性  $k_f$  が一定の場合, 球殻は軸対称変形を引き起こす.
- 厳密解法に基づく座屈荷重と簡易座屈荷重の誤差は, バネの剛性比が増加するにつれて小さくなる.
- 簡易座屈荷重は, 特にバネの剛性比が大きい場合に十分な精度を有する.
- 今後は球殻が二層構造の場合の座屈モードの解析を行っていく.

### 参考文献

- 1) M.Sato, M.A.Wadee, T.Sekizawa, K.Iiboshi, and H. Shima: Hydrostatically pressurized buckling of complete spherical shells filled with an elastic medium, 土木学会論文集 A2 (応用力学) Vol.67, No.2, I\_15-I\_22,2011.
- 2) W.Flugge, Stress in shells Second Edition, Springer-Verlag, Berlin(1962).
- 3) S.P. Timoshenko, and J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd Edition McGraw-Hill(1962), 512-517