

多層弾性チューブの曲げ挙動における断面偏平化メカニズムの解析的検討

Analytical Investigation on Cross-sectional Ovalization for Elastic Multi-Walled Tubes under Bending

北海道大学工学部

北海道大学大学院工学院

北海道大学大学院工学院

北海道大学大学院工学研究院

○学生員 石渡 裕太 (Yuta Ishiwata)

学生員 梶田 寛人 (Hiroto Kajita)

学生員 池田 哲郎 (Tetsuro Ikeda)

正 員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

1. まえがき

単層のチューブ構造は純曲げを受けると断面偏平を生じ、これが力学的に不安定な状態を引き起こすことが知られている。この断面偏平化は内部に他の物質が充填されている場合や、多層構造を有するチューブなどでは抑制されることが予想される。本研究では多層構造を持つチューブ構造において、断面偏平が生じるメカニズムの評価手法を提示するとともに、偏平化抑制効果を定量的に評価することを目的とする。また実際の解析例として曲げに対し断面偏平を生じづらいとされる多層カーボンナノチューブ (Multi-Walled Carbon Nanotubes, 以下 MWCNT) を取り上げ、当該構造物の多層化に伴う断面偏平抑制効果を検証する。

2. 解析モデル

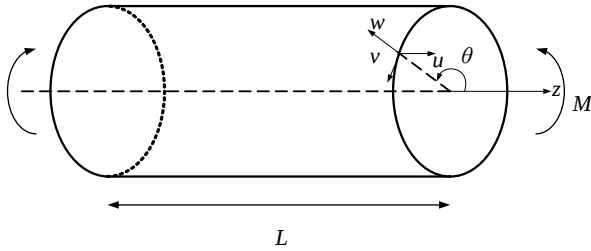


図-1 解析モデル

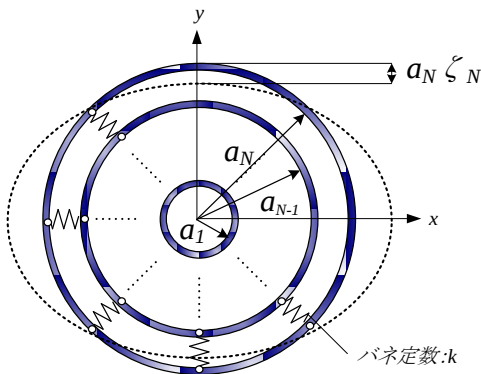


図-2 断面の概念図

図-1 は解析対象とする弾性チューブ(層厚 t 、長さ L 、半径 a_N)のモデル図である。チューブは、非常に薄い弾性体(ヤング係数 E)として薄肉理論を適用し、ポアソン比の影響は考慮しないものとする。内側の弾性体はそれぞれ独立なバネ(バネ定数 k)の集合として扱う。チューブは大きさ M の純曲げを受けて、軸方向に一定の曲率 C を生じる。

図-2 は断面の概念図である。最内層から1層と順に数

え、 i 層における半径を a_i とし最外層 N まで設定する。最内層は中空状態とし、2 層目以降からすべての層にバネを設置する。チューブは径に対し非常に長い構造であることから平面ひずみ状態であることを仮定する。もとの直径 a_N から短軸方向に減少した長さの割合を示す楕円化率を ζ で表現し、最外層におけるつぶれ量を $a_N \zeta_N$ として表す。

3. 現象の定式化

エネルギー理論を用いて定式化を行う。任意の位置(a_i, θ, z_i)におけるチューブの半径、円周方向の変位をそれぞれ w_i, v_i とすると変位式は以下のように表せる。

$$w_i = a_i \zeta_i \cos 2\theta \quad (1)$$

$$v_i = -\frac{1}{2} a_i \zeta_i \sin 2\theta \quad (2)$$

軸方向の変位 u_i は Timoshenko 梁理論(せん断変形なし、楕円断面)を採用し曲率 C に対して

$$u_i = C \left(z_i - \frac{L}{2} \right) [a_i \sin \theta + w_i \sin \theta + v_i \cos \theta] \quad (3)$$

変形による円周方向によるひずみエネルギーを式(4)、軸方向のひずみエネルギーを式(5)に表す。また U_θ での微分記号は θ での微分、 U_z での微分記号は z による微分を表す。

$$U_{\theta,i} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[Et \left\{ \frac{v'_i - w_i}{a_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_i - w'_i}{a_i} \right)^2 \right\}^2 + \frac{Et^3}{12} \left(\frac{v'_i - w'_i}{a_i^2} \right)^2 \right] a_i d\theta dz \quad (4)$$

$$U_{z,i} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[Et \left(u'_i + \frac{1}{2} w_i^2 + \frac{1}{2} v_i^2 \right)^2 + \frac{Et^3}{12} w_i^2 \right] a_i d\theta dz \quad (5)$$

バネの反発力によるエネルギー式は以下になる。

$$U_{k,i} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} k (w_i - w_{i-1})^2 a_i d\theta dz \quad (6)$$

チューブが蓄える全ポテンシャルエネルギーの総和は次式で表される。

$$U = \sum_{i=1}^N U_{\theta,i} + \sum_{i=1}^N U_{z,i} + \sum_{i=2}^N U_{k,i} \quad (7)$$

U を各層の楕円化率 ζ_i で微分し、停留条件を与え楕

円化率 ζ_i を求める。停留条件は以下の式である。

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,N-1,N) \quad (8)$$

断面変形を表す式は極座標を用いて以下の式で表す。

$$x_i = a_i \cos \theta - v_i \sin \theta + w_i \cos \theta \quad (9)$$

$$y_i = a_i \sin \theta + v_i \cos \theta + w_i \sin \theta \quad (10)$$

4. 解析結果

層厚 t 、曲率 C 、ヤング係数 E 及びバネ定数 k を断面半径 a_N を用いて、 $t/a_N=0.02$ 、 $C^*=Ca_N$ 、 $k^*=ka_N/E$ と無次元化し計算を行う。層間距離 d を $d/a_N=0.02$ とする。図-3 は $k^*=0.1$ 、 $C^*=0.01$ の時の $N=10$ 、 $N=40$ の断面変形をそれぞれ表したものである。層数 N を増やすことで断面の楕円化を抑制できることがわかる。

図-4 は図-3 と同じ条件で、横軸に層数 N を、縦軸に最外層での断面のつぶれ量を取り、曲率を場合分けしたグラフである。どの曲率の場合でも 40 層付近を境につぶれ量が収束していることがわかる。

図-5 は横軸に層数を取り、縦軸は $k^*=0.1$ と $k^*=10$ の場合の最外層でのつぶれ量の差を取ったグラフである。その差を δ_N とする。

$$\delta_N = (a_N \zeta_N)_{k^*=0.1} - (a_N \zeta_N)_{k^*=10} \quad (11)$$

層数が少ないときはつぶれ量に差が出ないが、層数が増えるにしたがって k^* の作用が大きくなりつぶれ量の差が顕著に現れてくる。また、曲率が大きくなるにしたがって、 δ_N の傾きも大きくなる。

次に実際の解析例として MWCNT を考える。MWCNT では、層間に働く van der Waals 力が作用する。その影響を文献²⁾を用いてモデル化する。ヤング係数、層厚、層間距離をそれぞれ $E=3.835\text{TPa}$ 、 $t=0.08997\text{nm}$ 、 $d=0.3415\text{nm}$ とする。 $C^*=0.01$ 、 $a_N=20\text{nm}$ 、 $N=10$ の時の MWCNT の断面図を図-6 で表す。図-3 の弾性チューブと比較しても、MWCNT はほとんど楕円化しないことがわかる。図-7 は曲率を横軸に取り、MWCNT の最外層でのつぶれ量を縦軸に取り、層数で場合分けしたグラフである。断面の半径が 10^{-9}m というオーダーに対して、つぶれ量が 10^{-22}m という非常に小さいオーダーになることがわかる。

5. まとめ

本研究から以下の知見が得られた。

- ・弾性チューブは層数を増やすことで、つぶれ量がある一定の値に収束し断面の楕円化が抑制される。
- ・チューブ層間の弾性体は、層数が多くまた曲率が大きくなるにつれて、断面変形に大きな影響を与える。
- ・MWCNT はヤング係数が大きいために、層数が少ない時でも断面の楕円化は起こり難い。

参考文献

- 1) B.O. Bruth and B.O. Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975
- 2) H. Shima, S. Ghosh, M. Arroyo, K. Iiboshi and M. Sato: Thin-shell theory based analysis of radially pressurized multiwall carbon nanotubes, Computational Materials Science, Vol.52(1), pp. 90-94 (2012)

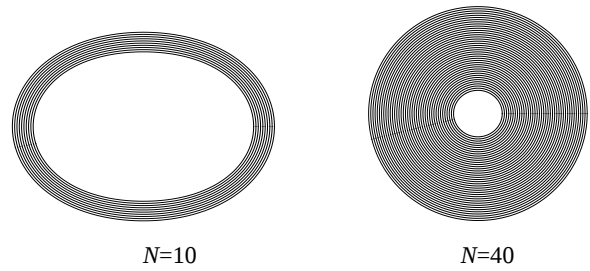


図-3 弾性チューブの断面変形 ($k^*=0.1$, $C^*=0.01$)

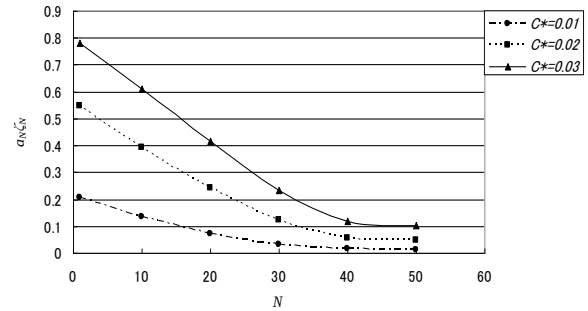


図-4 曲率の違いによる最外層でのつぶれ量($k^*=0.1$)

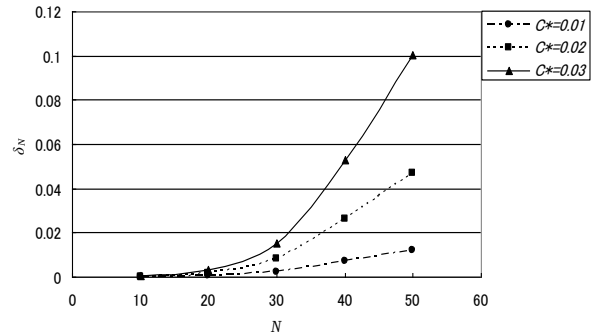


図-5 $k^*=0.1$ と $k^*=10$ のときの最外層でのつぶれ量の差

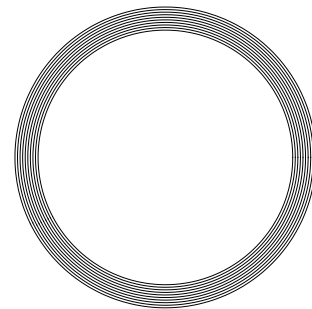


図-6 MWCNT の断面図($N=10$, $C^*=0.01$)

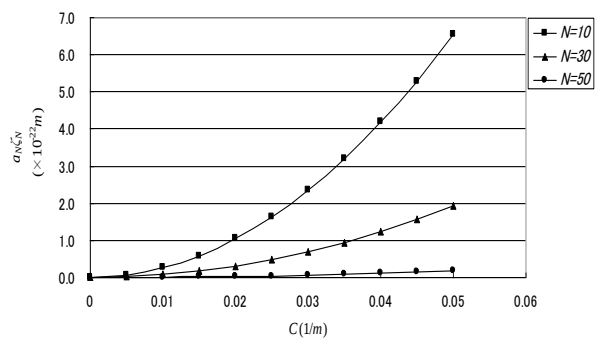


図-7 MWCNT の最外層でのつぶれ量