Ａ－２０　　平成23年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第68号

三次元混合ハイブリッド FEM に関する基礎的検討

Fundamental study on Three-Dimensional Mixed Hybrid FEM

北海道大学工学部　○学生員　小松　駿也 (Shunya Komatsu)
北海道大学大学院工学院　学生員　横井　崇志 (Takashi Yokoi)
北海道大学大学院工学研究院　フェロー　蟹江　俊仁 (Shunji Kanie)

1.　研究背景

混合ハイブリッド FEM(MHF)とは，目的変数がひとつしかない非退化形式の支配方程式を離散化する一般的な有限要素法(FEM)と異なり，その目的変数の微分値も目的変数として与えた二本の式，つまり混合形式として与えられた支配方程式を離散化すること，さらに FEM では目的変数を節点に与えていたものを MHF では境界面で与えるというものである．さらに目的変数を一次で与え，その一次導関数を一定値として与える FEM を次数に関する条件を完全に満たしているという点で Complete と分類すれば，MHF は目的変数とその一次導関数の次数が一致していない Incomplete に分類されるという特徴がある．例えば，地下水流動問題において一般的な FEM を用いると，目的変数は速度ポテンシャルのみとなり各節点に与えられる．そのため境界における流速ベクトルは節点の値を用いて事後算出することになるが，境界における連続性は保証されず精度の高い解が得られない．一方，MHF では目的変数を速度ポテンシャル，流速ベクトルの二つにわけ，さらに目的変数を境界面におくことで境界面での連続性が保証され，流速ベクトルに関してより精度の高い解が得られるようになると考えられる．本研究では一般的な FEM と MHF との違いを，基礎的な二次元の Laplace 方程式を三次元に拡張して確認することが目的である．

2.　非退化形式と混合形式

目的変数がひとつしかなく，これ以上目的変数を消去できない非退化形式の Laplace 方程式は以下の通り．

$$k\nabla^2\Phi_k = 0 \qquad \text{式(2-1)}$$

目的変数がひとつしかないので少ない計算量で速度ポテンシャルを求めることができるというメリットがあるが，目的変数の微分値である流速ベクトルは事後算出することになり，節点での連続性は保障されず精度の高い値を求めることができない．また，∇を二乗しているのでスカラーを扱っているということに注意する必要がある．一方，目的変数を増やした以下の Laplace 方程式が混合形式である．

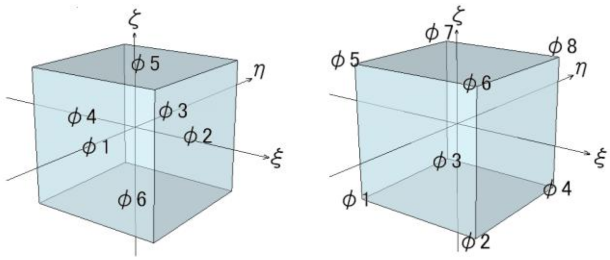
$$k\nabla\Phi_k = -\vec{q} \qquad \text{式(2-2)}$$

$$\nabla\vec{q} = 0 \qquad \text{式(2-3)}$$

式(2-2)はダルシー則，式(2-3)は非圧縮流体における質量保存則を表している．混合形式では流速ベクトルが支配方程式に組み込まれているので直接流速ベクトルを求めることができる．さらに流速ベクトルについて線形に補間することで境界での連続性が保障され，境界付近で精度の高い結果が得られる．また∇そのものを扱うのでベクトルを中心に扱っているということに注意する必要がある．流れの問題など，目的変数そのものよりもその一次導関数のほうが重視される場合において MHF が有効である．

3.　三次元モデル

図－1 に示すように ξ, η, ζ 軸を設定した三次元のモデルを考える．一般的な FEM では節点に目的変数を与えるが，MHF ではそれぞれの境界面に目的変数を与える．流量についても同様に FEM では節点に, MHF では境界面に定義して定式化を行う．定式化を行うモデルについては簡単のため各辺長を2とし，原点を要素の中心に設定した立方体の要素として考える．以下, MHF の定式化を行う．



図－1-1 MHF の定義　　図－1-2 FEM の定義

図－1　一般的な FEM と MHF の違い

4.　MHF における形状関数の導入

要素内の流速ベクトルを線形に補間し，境界面上の流量を用いて任意の点での流速ベクトルを推定するために，以下のような Raviart-Thomas 型の形状関数を導入する．

$$[\overline{N}] = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} \qquad \text{式(4-1)}$$

$$\begin{aligned}
&N_{1,\xi} = 0,\ N_{1,\eta} = \frac{1}{8}(\eta - 1),\ N_{1,\zeta} = 0 \\
&N_{2,\xi} = \frac{1}{8}(1 + \xi),\ N_{2,\eta} = 0,\ N_{2,\zeta} = 0 \\
&N_{3,\xi} = 0,\ N_{3,\eta} = \frac{1}{8}(1 + \eta),\ N_{3,\zeta} = 0 \\
&N_{4,\xi} = \frac{1}{8}(\xi - 1),\ N_{4,\eta} = 0,\ N_{4,\zeta} = 0 \\
&N_{5,\xi} = 0,\ N_{5,\eta} = 0,\ N_{5,\zeta} = \frac{1}{8}(1 + \zeta) \\
&N_{6,\xi} = 0,\ N_{6,\eta} = 0,\ N_{6,\zeta} = \frac{1}{8}(\zeta - 1)
\end{aligned} \qquad \text{式(4-2)}$$

この形状関数の特徴は単位面積あたりの流速ベクトルを表現するためにそれぞれ面積で除しているという点で

ある．そのためこの形状関数は(1/面積)という次元を持っている.また，符号について流量は要素からの流出方向を常に正とするが，流速ベクトルについてはξ, η, ζ軸に従うために，境界面1, 4, 6で実際にそれぞれの変数に-1を代入して負の値を算出するようにすることでξ, η, ζ軸に合わせているということに注意しなければならない．

5.　ダルシー則の離散化

式(2-2)について，要素全体で積分を行ううえでベクトルをもった重み関数$\delta\overline{W}$を与えて積分を行う．

$$\int_{\Omega_k}\left(k\nabla\Phi_k + \vec{q}\right)\delta\overrightarrow{W}d\Omega_k = 0 \qquad \text{式(5-1)}$$

要素の代表値は要素内で一定の値をとるので，この一次導関数が式中に出てこないように Green の定理を用いて式の離散化を行う必要がある．

$$\oint_{S_k} k\bar{\phi}\delta\overline{W}ndS_k - \int_{\Omega_k} k\Phi_k\nabla\delta\overline{W}d\Omega_k + \int_{\Omega_k}\bar{q}\delta\overline{W}d\Omega_k = 0 \qquad \text{式(5-2)}$$

式(5-2)の左辺第一項について Green の定理の適用前では速度ポテンシャルは要素の代表値を用いていたが，Greenの定理適用後には境界面上の速度ポテンシャルに変わっている．これは要素内部で起こっている現象を要素の外部の値だけで表現するという Green の定理の特徴である．またGreenの定理を適用することで現れる単位法線ベクトルnは境界面1, 4, 6において負の値をとるが，積分方向も逆になるのでここでは符号については考慮する必要がない．それぞれの項のマトリクスの大きさが一致することに注意して離散化を進めることで以下の式が得られる．

$$\left\{\overline{Q_i}\right\} = k\Phi_k\left[M\right]^{-1}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{Bmatrix} - k\left[M\right]^{-1}\begin{Bmatrix}\overline{\phi_1}\\\overline{\phi_2}\\\overline{\phi_3}\\\overline{\phi_4}\\\overline{\phi_5}\\\overline{\phi_6}\end{Bmatrix} \qquad \text{式(5-3)}$$

ここで，

$$\left[M\right] = \int_{\Omega_k}\left[\overline{N}\right]^T\left[\overline{N}\right]d\Omega_k \qquad \text{式(5-4)}$$

6.　質量保存則の離散化

式(2-3)について，ここで与える重み関数は領域内における流速ベクトルの微分値が常に一定であることから，重み関数として1を与えることで離散化を進める．流速ベクトルの微分値は

$$\nabla\bar{q} = \left\{\frac{\partial}{\partial\xi} \quad \frac{\partial}{\partial\eta} \quad \frac{\partial}{\partial\zeta}\right\}\left[\overline{N}\right]\left\{\overline{Q_i}\right\} \qquad \text{式(6-1)}$$

これを支配方程式にあてはめて要素内で積分することで流量についての関係式が得られる．

$$\overline{Q_1} + \overline{Q_2} + \overline{Q_3} + \overline{Q_4} + \overline{Q_5} + \overline{Q_6} = 0 \qquad \text{式(6-2)}$$

ここでは非圧縮の流体を考えているため要素から流出する流量の総和は 0 という質量保存則を表している．式(5-3)の連立方程式を解くことで得られた各境界面での流量を式(6-2)に代入することで

$$\Phi_k = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\overline{\phi_i} \qquad \text{式(6-3)}$$

各境界面における速度ポテンシャルの平均値が要素の速度ポテンシャルの代表値になっている．式(6-3)を式(5-3)に代入することで流量と各境界面での速度ポテンシャルの関係式を導出することができる．

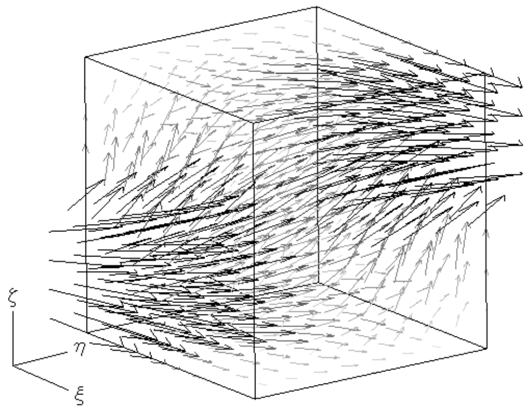
$$\left\{\overline{Q_i}\right\} = k\left[C\right]\left\{\overline{\phi_i}\right\} \qquad \text{式(6-4)}$$

行列[C]は行，列ともに境界の数をもった正方行列であり，立方体のモデルを考えた場合(6×6)の正方行列となる．

7.　MHFによる解析結果

図－2はMHFを用いて，立方体の要素数8，それぞれの要素を64分割したモデルに左下奥から右上手前に向かって速度ポテンシャルを Dirichlet 条件として与えることで流れを表現したものである．

MHF では速度ポテンシャルと流量の定義を境界面に定義することで，境界面で得られた流量に形状関数を与えることで要素内の任意の点における流速ベクトルを求めることができる，



図－2 MHFによる流速ベクトル

8.　まとめ

本研究によって三次元問題におけるMHFの概念を理解し，その定式化を通してMHFの特徴を整理することができた．目的変数を境界面に与える MHF は，目的変数を節点に与えるFEMに比べ，FEMでは不可能だった境界面における連続性を確保できるので，透水係数などの条件が大きく変化するような点においてその精度を向上することができると推測できる．今後はFEMによる定式化を行い，ふたつの解析手法の違いを明確にすることでMHFの利点と欠点を研究する必要がある．また，要素数を増やし，実際に透水係数の大きく違う要素を流れの中に組み込むことによって FEM と MHF のふたつの解析手法にどれほどの違いが現れるかを検討する必要がある．

参考文献

1)　土屋健司：混合ハイブリッド有限要素法の基礎的特性に関する検討，北海道大学環境社会工学科平成 22 年度修士論文, pp.3-47, 2010