トンネル覆工における劣化過程モデルの考察

A Basic Consideration on Degrading Process for Tunnel Lining Concrete

東京都市大学工学部　　正会員　須藤 敦史（Atsushi Sutoh）
(独)土木研究所寒地研究所 正会員　佐藤　京　（Takashi Sato）
(独)土木研究所寒地研究所 正会員　西　弘明　（Hiroaki Nishi）
東京都市大学大学院　　学生会員 糸井 謙介（Kensuke Itoi）

1. はじめに

北海道の山岳トンネルでは,ライフサイクルマネージメント(Life Cycle Management : LCM)やアセットマネジメント[1)など]が必要となるが,これらに必須とである現状の劣化度の把握や将来予測ができないのが現状である.

本研究では,新たな覆工コンクリートの劣化過程モデル（Poisson 過程を外乱とする確率微分方程式）を提案して,北海道内のトンネル点検データより得られた情報をもとに劣化状態の将来予測を行うことを目的としている.

2. トンネル覆工における劣化過程[2)]

時刻 t の損傷度 $X(t)$ は平均的時間成長は以下となる.

$$dX(t)/dt = m_0(t)g(X(t)) \tag{1}$$

$g(x)$:損傷度 x のときに損傷成長速度を与える形状関数, $m_0(t)$:平均的時間成長(ドリフト)係数

また,損傷成長の不規則性は,時間成長係数 $m_0(t)$ の不規則変動により誘発されるとすると以下となる.

$$dX(t)/dt = \{m_0(t)+Z(t)\}g(X(t)) \tag{2}$$

$Z(t)$:駆動雑音であり平均が 0 の確率過程

式(2)を伊藤型確率微分方程式とすると式(3)が得られ,以下に損傷度の Poisson 型時間成長の定式化を行う.

$$dX(t) = m_0(t)g(X(t))dt + g(X(t^-))dZ(t) \tag{3}$$

$X(t^-) : X(t)$ の左連続変形

2.1 算術ブラウン運動モデル

駆動雑音 $Z(t)$ が $g(x)=1$ として与えられる.

$$Z(t) = s_0 B(t) \tag{4}$$

s_0 :正定数, $B(t)(0 \le t < \infty) : B(0)=0$

任意の $0 \le s < t < \infty$ において $B(t)-B(s)$ が $N(0, t-s)$ である独立増分な標準 Wiener 過程であり,式(2)を用いると算術ブラウン運動モデルが得られる.

$$dX(t) = m_0(t)dt + s_0 dB(t) \tag{5}$$

s_0 :ボラティリティ

式(5)の解は $m_0(t)=m_0$（定数）とすると次式となる.

$$X(t) = X(0) + m_0 t + s_0 B(t) \tag{6}$$

すなわち初期値 $X(0)=x$ が与えられると $X(t)$ は $N(x+m_0 t, s_0{}^2 t)$ に従う.また算術ブラウン運動の平均値と分散値は時間 t の線形関数であり,損傷度が負になることを許容するモデルである.

2.2 幾何ブラウン運動モデル

$g(x)=x$ として式(4)の駆動雑音を用いると式(7)に示す幾何ブラウン運動（Black-Scholes Model）となる.

$$dX(t) = m_0(t)X(t)dt + s_0 X(t)dB(t) \tag{7}$$

同様に $m_0(t)=m_0$ とすると式(7)の解は次式となる.

$$X(t) = X(0)\exp\{(m_0 - 0.5 s_0{}^2)t + s_0 B(t)\} \tag{8}$$

幾何ブラウン運動モデルでは,損傷度の時間成長過程 $X(t)$ は対数正規分布に従い,平均と分散は以下となる.

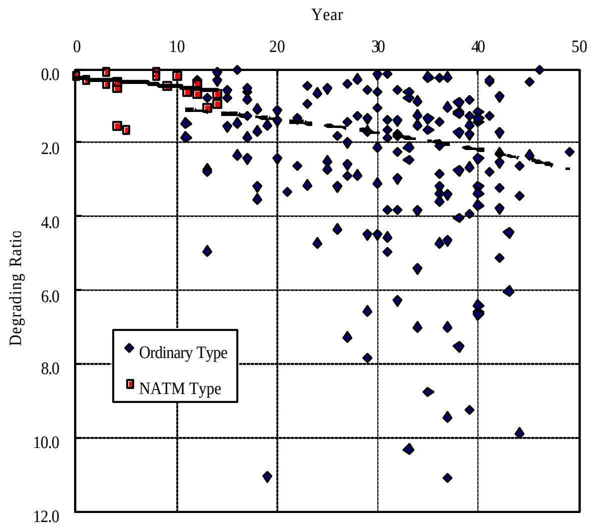

図-1　実ﾃﾞｰﾀより求めた幾何ﾌﾞﾗｳﾝ運動ﾓﾃﾞﾙのﾄﾞﾘﾌﾄ

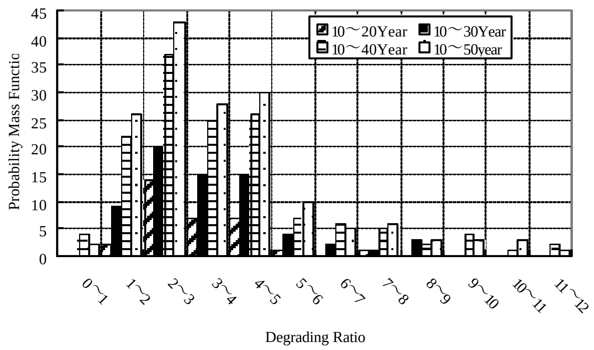

図-2　実ﾃﾞｰﾀより求めた幾何ﾌﾞﾗｳﾝ運動ﾓﾃﾞﾙのﾎﾞﾗﾃｨﾘﾃｨ

$$E[X(t)] = X(0)\exp\{m_0 t\} \quad (9)$$

$$Var[X(t)] = X(0)^2 \exp\{2m_0 t\}(\exp\{s_0{}^2 t\} - 1) \quad (10)$$

また幾何ブラウン運動 $X(t)$ の対数変換 $\log X(t)$ は算術ブラウン運動となる.

幾何ブラウン運動モデルでは,損傷度の時間成長は連続となるが,駆動雑音の Wiener 過程からサンプルパスは増加と減少を繰返しながら成長する挙動を示す.

したがって,損傷度が補修・補強等の人為的な操作無しの減少は一般にはあり得ないために,サンプルパスの挙動として幾何ブラウン運動モデルの適用には問題が残る.

しかし,式(7)の実モデルへの適用の妥当性については参考文献 3)などで検証している（図-1,2 参照）.

2.3　複合 Poisson 型モデル

複合 Poisson 過程 $C(t)$ は $N(t)$ を強度 l の Poisson 過程（$\{Y_k\}_{k=1,2,\cdots}$:互いに独立で同一分布）とする.

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \quad (11)$$

複合 Poisson 過程において, $E[Y_k] = q_1$ とすると平均は次式となる.

$$E[C(t)] = l q_1 t \quad (12)$$

したがって, 平均値が 0 である駆動雑音を $Z(t) = C(t) - l q_1 t$ として複合 Poisson 型モデルが得られ,これを損傷度予測の基本式(13)として提案する.

$$dX(t) = \{m_0(t) - l q_1\} X(t)dt + X(t^-)dC(t) \quad (13)$$

ここで $m_0(t) = m_0$ とすると複合 Poisson 型モデルの解は次式となる.

$$X(t) = X(0)\exp\{(m_0 - l q_1)t\}\prod_{k=1}^{N(t)}(1 + Y_k) \quad (14)$$

また $X(t)$ の確率密度関数はたたみ込み積分を含んだ関数形となり,平均値と分散値は次式となる.

$$E[X(t)] = X(0)\exp\{m_0 t\} \quad (15)$$

$$Var[X(t)] = X(0)^2 \exp\{2m_0 t\}(\exp\{l q_2 t\} - 1) \quad (16)$$

$q_2 = E[Y_k{}^2]$:ジャンプの 2 次モーメント

ここで Y_k の確率密度関数 $f_Y(y)$ が,平均値 n の指数分布に従うものとする.

$$f_Y(y) = (1/n)\exp(-y/n) \quad (17)$$

この仮定の下で $q_2 = E[Y_k{}^2] = 2n^2$ となる.

3.　劣化過程モデルのパラメータ推定

幾何ブラウン運動モデルと提案した複合 Poisson 型モデルのドリフト m_0 は共通であり,幾何ブラウン運動の対数変換が算術ブラウン運動となるのでドリフト m_0 およびボラティリティ s_0 を求める.

$$\log X(t) = \log X(0) + (m_0 - 0.5 s_0{}^2)t + s_0 B(t) \quad (18)$$

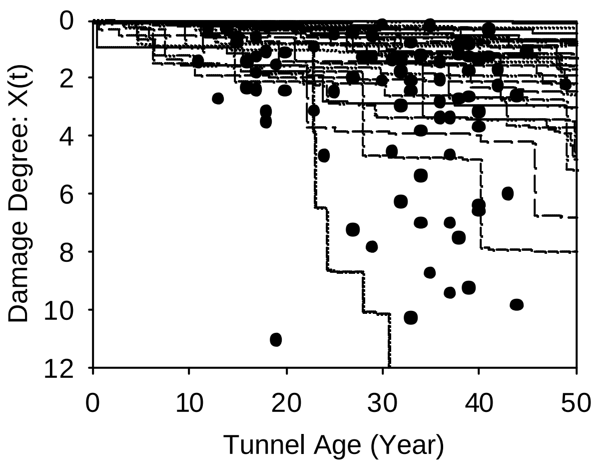

図-3　複合 Poission 型ﾓﾃﾞﾙのｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ

$\log X(t)$ は,算術ブラウン運動過程となり,初期損傷度 $X(0)$ が確率変数であるとすると平均値と分散値は時間 t に線形な関数として与えられる.

$$E[\log X(t)] = E[\log X(0)] + (m_0 - 0.5 s_0{}^2)t \quad (19)$$

$$Var[\log X(t)] = Var[\log X(0)] + s_0{}^2 t \quad (20)$$

実観測値から直線回帰により $\log X(t)$ の平均値と分散値の時間変化直線 $m(t)$ および $v(t)$ が求められている場合に回帰係数を求めることを行う.

$$m(t) = a_1 + b_1 t \quad (21a) \quad , \quad v(t) = a_2 + b_2 t \quad (21b)$$

式(21a,21b)と式(19)および式(20)の関係より,ドリフト m_0 およびボラティリティ s_0 を求めることが可能となる.

また $s_0{}^2 = l q_2$, Y_k の確率密度関数の指数分布から平均値 $n = s_0 / \sqrt{2l}$ を求めると Y_k のジャンプの 2 次モーメント $q_2 = 2n^2$ が求められる.

ここで複合 Poisson 過程 $N(t)$ の数値解析（20 ケース）を図-3 以下に示す.ここでは複合 Poisson 型モデルの損傷度成長過程は実トンネルより得られた損傷度を用い,強度は図-2 などより推定された $l = 0.1$ を用いている [2).]

【参考文献】

1) 中村一樹,竹内明男,山田正:トンネルマネジメントシステムの構築,土木学会,建設マネジメント研究論文集 Vo1.11,2004.12.

2) H. Tanaka, O. Maruyama, A. Sutoh: Probabilistic Model for Damage Accumulation in Concrete Tunnel Lining and its Application to Optimal Repair Strategy, ICASP11,pp.2368-2375,2011.

3) 須藤敦史,近野,丸山収,佐藤京,西弘明:寒冷地トンネルの覆工における劣化過程の同定と長期予測,土論集 F1（トンネル工学）特集号 Vol.66,No.1/pp.61-68,2010.11.