

気液界面の力学的ジャンプ条件に対する数値モデル開発

Model of boundary condition for air-liquid flow

北海道大学大学院工学院 ○ 学生員 岩下厚志 (Atsushi IWASHITA)
北海道大学大学院工学研究院 正員 渡部靖憲 (Yasunori WATANABE)

1. はじめに

海洋における砕波は、大量に混入する気泡の海中への拡散を通して大気中の気体を効率的に海中へ溶解させ、大気-海洋間のガス交換に対して極めて重要な役割を果たす(図1参照)。一方で現在このガス輸送は、海上風のみをパラメータとする経験的方法により見積もられており、砕波及び混入気泡の寄与が大きいにもかかわらず陽的に与えられていないのが現状である。こうした従来のバルクモデルによる追算により予測結果は大きな誤差が伴うことが指摘されている¹⁾。また界面の薄い層では、ガス輸送の計測が困難であることから風波の発達から砕波そしてエアレーションの一連の効果を適切に記述する新たなモデルの開発が必要であると考えられる。

気液両相が混在する流体計算のモデルは多数提案されている一方、その殆どが混合モデルをベースにしたものであるため界面とその近傍の流れの正しい相互作用が再現できない。すなわち界面近傍の通常5個程度のグリッドに渡って流体から気体となる連続したスムーズに変化する密度・粘性係数を与え、それ故結果として取得する圧力や流速もまたこの領域でスムーズに変化し、いわゆる smeared solution となり現実の界面のダイナミクスを表現しない(図2参照)。この問題は以前から指摘されてきた一方²⁾これに代わる計算モデルがないのが現状である。液体単相流においては Watanabe et al (2008)は自由水面の力学的境界条件のジャンプをデカルト座標系上で満足させる新たなモデルを開発し、これにより水面の動局所変形を記述するために不可欠な水面-渦相互作用を適切に与えている。

本研究は Watanabe et al (2008)のモデルを拡張し、気液界面の力学的ジャンプ条件を満足させるための計算モデルを開発するものであり、砕波から気泡混入への物理プロセスを明らかにし、大気-海洋間ガス輸送問題を理解するためのモデルとつなげるための基礎研究に位置付けられるものである。本論文では気液界面の境界条件から求めた界面近傍の諸量の計算結果を紹介し考察を行う。

2. 数値計算法

本研究の計算は、気相と液相を別々に計算する二流体モデルを採用する。計算領域を別々にすることで、界面近傍の密度や表面張力を明快に計算ができる。支配方程式は Navier-Stokes 方程式を用いる。この時、全ての変数は重力加速度・水深・水の密度で無次元化する。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{r} \nabla p + n \nabla^2 u - \nabla t - g \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで u は流速、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は粘性係数、 τ は剪断力、 g は重力加速度を表す。

(1) 式を離散化し二段階分離すると non-advection phase(2)式と advection phase(3)式を得る。



図1 砕波による気泡の連行 Dr.Chanson より

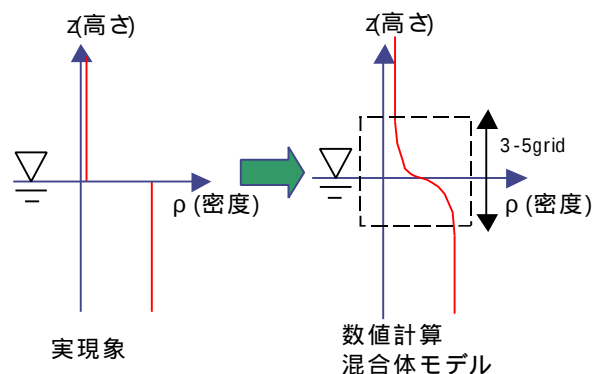


図2 混合モデルによる界面近傍の密度の表現

non-advection phase

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{r} \nabla p + n \nabla^2 u_i - \nabla t - g \quad \dots\dots\dots(2)$$

advection phase

$$\frac{Du}{Dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Non-advection phase について、(2)式の発散をとるとポアソン方程式から圧力を得、また予測子修正子法により流速を得る。advection phase について、CIP 法により物理量(流速・乱れエネルギー・Level-Set 関数)を(3)式に従い移流計算する。水面の捕捉及び曲率は Level-Set 関数 ϕ を用いて(4)式に従い CIP 法で移流計算をする。ここで Level-Set 関数とは界面上でゼロ・気相で負・液相で正となる界面からの距離関数と定義する。

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

上式は自由水面運動学的境界条件そのものである。この関数を満足させれば必然的に運動学的境界条件は満足される。

3. 境界条件

本数値モデルでは気体流速と液体流速を別々に計算するために、境界条件を解き、両相の界面を結合させる必要がある。なお界面上の流速及び流速勾配はデカルト格子では陽的に与えられないため、界面近傍の流速勾配を界面上で Taylor 近似し(5)式から求める(図3参照)。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s + a_{i,j}x + b_{i,j}y + c_{i,j}z \quad \dots\dots\dots(5)$$

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ は各計算点での流速勾配, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s$ は界面上の流速勾配, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ は Taylor 近似で得られる未定係数, x, y, z は各 Level-Set 関数 ϕ の成分である。ここで $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 及び x, y, z は移流計算より既知のため、未定係数 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ を求めると同時に界面上の流速勾配 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s$ は求まる。

さらに界面上の流速 u_i は(6)式から求めることができる。

$$u_i = u_i \Big|_s + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s x_j \quad \dots\dots\dots(6)$$

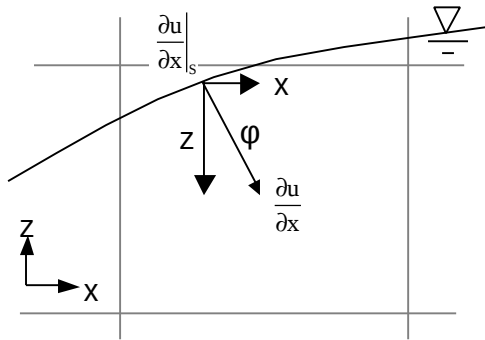


図3 界面の流速勾配

界面上から界面近傍の計算点までの距離成分を x, y, z としている。Taylor 近似することで界面上の流速及び流速勾配をデカルト座標系で示せる。

以下より界面近傍の境界条件について示す。

3.1 接線方向の力学的境界条件

接線方向の力学的境界条件は(7)(8)式で示す。風波に対する風の水面駆動などの水面せん断応力を決定するだけでなく、自由水面流れにおいて曲率のある水面上に発生する渦度を与える重要な条件と考えられる³⁾。

$$m^l \left[\frac{\partial u_n^l}{\partial s} + \frac{\partial u_s^l}{\partial n} \right] = m^a \left[\frac{\partial u_n^a}{\partial s} + \frac{\partial u_s^a}{\partial n} \right] \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$m^l \left[\frac{\partial u_n^l}{\partial t} + \frac{\partial u_t^l}{\partial n} \right] = m^a \left[\frac{\partial u_n^a}{\partial t} + \frac{\partial u_t^a}{\partial n} \right] \quad \dots\dots\dots(8)$$

添え字の l は液相を a は気相を意味し、式中の s, t は互いに直交する水面の接線方向の座標系を, n は水面の法線方向の座標系である(図4参照)。

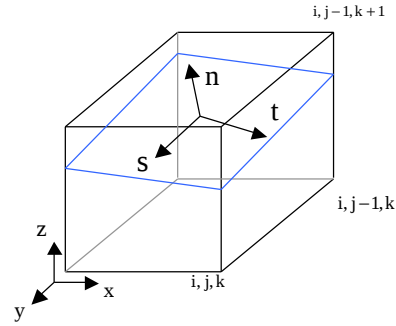


図4 セル内における水面の座標系(s-t-n 座標系)

(7)(8)式をデカルト座標系で表すと(7')(8)'式となる。

$$\sum_{i,j=1,2,3} m^l \left(\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - a_{i,j}^l x^l - b_{i,j}^l y^l - c_{i,j}^l z^l \right) (s_j n_i + s_i n_j) = \sum_{i,j=1,2,3} m^a \left(\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} - a_{i,j}^a x^a - b_{i,j}^a y^a - c_{i,j}^a z^a \right) (s_j n_i + s_i n_j) \quad \dots\dots(7')$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} m^l \left(\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - a_{i,j}^l x^l - b_{i,j}^l y^l - c_{i,j}^l z^l \right) (t_j n_i + t_i n_j) = \sum_{i,j=1,2,3} m^a \left(\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} - a_{i,j}^a x^a - b_{i,j}^a y^a - c_{i,j}^a z^a \right) (t_j n_i + t_i n_j) \quad \dots\dots(8')$$

上式を展開すると54個の未定係数 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ を得る。

3.2 接線流速・法線流速の運動学的境界条件

接線流速・法線流速の運動学的境界条件を下式で表す。

$$\begin{pmatrix} s_i \\ t_i \\ n_i \end{pmatrix} u_i \Big|_s = \begin{pmatrix} s_i \\ t_i \\ n_i \end{pmatrix} u_i \Big|_s \quad \dots\dots\dots(9)(10)(11)$$

これは界面近傍の気液両相の接線・法線流速は等しいことを示す式であり、気液二相流の数値計算において、気相と液相のズレや隙間を空けないために不可欠である。

(9)(10)(11)式に(5)(6)式を代入すると下式となる。

$$\sum_{i,j=1,2,3} \left[u_j^a - u_j^l + \frac{\partial u_j^l}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right] \begin{pmatrix} s_j \\ t_j \\ n_j \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1,2,3} \left[(a_{i,j}^l x^l + b_{i,j}^l y^l + c_{i,j}^l z^l) x_i^l - (a_{i,j}^a x^a + b_{i,j}^a y^a + c_{i,j}^a z^a) x_i^a \right] \begin{pmatrix} s_j \\ t_j \\ n_j \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(9')(10')(11')$$

(9')(10')(11)' も展開することで54個の未定係数 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ が得る。

3.3 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ の導出

これまで1点の気体内座標と1点の液体内座標に対して接線方向の力学的境界条件が2式、接線・法線流速の運動学的境界条件が3式の計5式を示した。従って計算点を気相にM点、液相にN点とれば5MN個の方程式がたてられる。よって5MNがそれぞれの方程式に含まれる54個の未定係数 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ を上回れば未定係数を解くことができる。

3.4 法線方向の力学的境界条件

法線方向の力学的境界条件を下式で示す．

$$p^l - p^a = 2m^l \frac{\partial u_n}{\partial n} - 2m^a \frac{\partial u_n}{\partial n} + s\kappa \quad \dots\dots\dots(12)$$

σ は表面張力， κ は曲率とする．(12)式は風波の生成・発達や，砕波過程などにしばしば関連する表面張力波や飛沫，気泡の生成等で重要となる圧力，粘性力と表面張力とのバランスを表している．

ここで，界面の加速度について着目する．界面上の加速度は等しいため(13)式とできる．

$$\left. \frac{Du^a}{Dt} \right|_s = \left. \frac{Du^l}{Dt} \right|_s = \frac{Du_s}{Dt} \quad \dots\dots\dots(13)$$

そして界面の加速度 $\frac{Du_s}{Dt}$ を気相界面加速度 $\left. \frac{Du^a}{Dt} \right|_s$ で示す

と(14)式となる．

$$\frac{Du_s}{Dt} = -\frac{1}{r^a} \nabla p^a + n^a \nabla^2 u^a - \nabla t^a - g^a \quad \dots\dots\dots(14)$$

(14)式について二段階分離を行う．気体の密度 r^a は液体の $\frac{1}{1000}$ であることを考慮すると右辺の第2項から第4項は無視でき non-advection phase は(15)式で表せる．

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = -\frac{1}{r^a} \nabla p^a \quad \dots\dots\dots(15)$$

(15)式では気体圧力 p^a を陽的に求める事ができる．

更に(12)式に p^a を代入することで液体圧力 p^l を求める事ができる．

4. 計算アルゴリズム

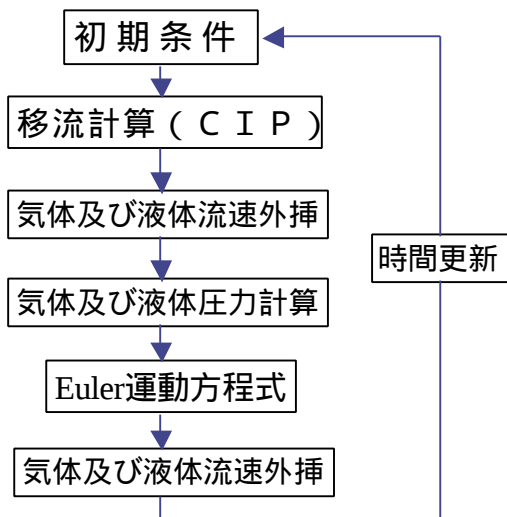


図5 計算アルゴリズム模式図

計算は図5のような流れで進める．

5. 計算条件

今回，気液二相流での界面近傍の様子を明らかにするために $50 \times 50 \times 50 \text{ cm}^3$ の矩形水槽にジェットを流入する計算を行った(図5参照)．静水面は水槽底面から 38cm，ジェットの直径は 10cm，ジェット速度は 1.5m/sとしている．現段階では圧力計算の前に流速の外挿を行うと数値的に不安定になるため，Euler 運動方程式の後に流速を外挿した．なお時間更新後の圧力計算も圧力の収束が行われていないため，時間更新を行っていない計算結果を示す．

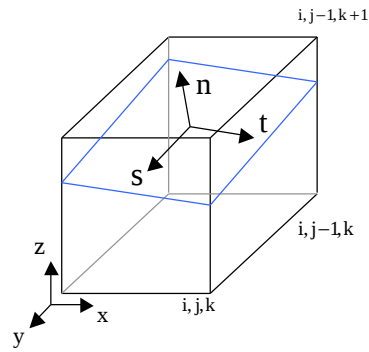


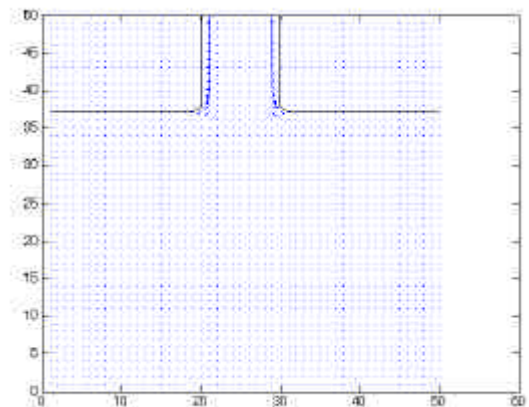
図6 計算領域

5. 計算結果

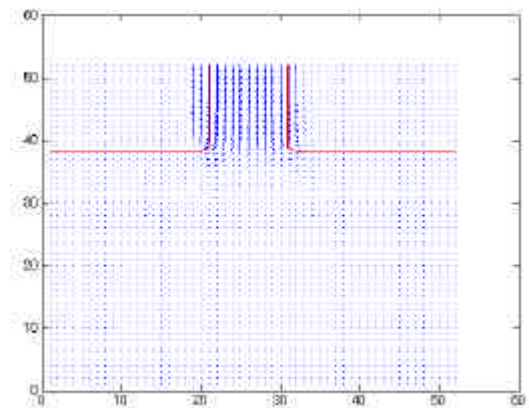
以下より計算結果を示す．全ての図は矩形水槽の奥行き方向の中心で断面にした結果である．

結果1について，界面近傍の境界条件から液相の界面上の流速を求めた．結果2では流体外に液体流速が発生しているのは液体界面近傍の流速を移流するために(6)式に基づいて流速を外挿したためである．

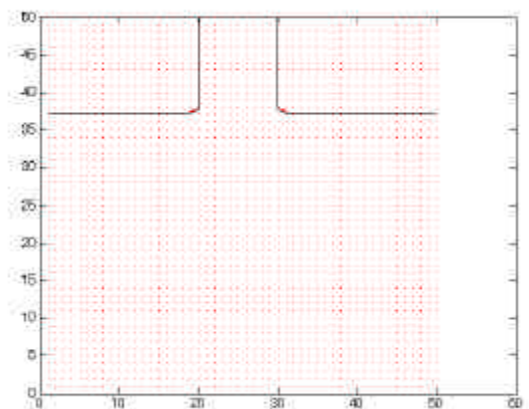
結果3について，ジェットの着水地付近で気相の界面流速が現れていた．結果4は気体流速分布で，前述の通り，界面近傍の流速の移流計算を行うために(6)式に基づいて流速の外挿をしてある．



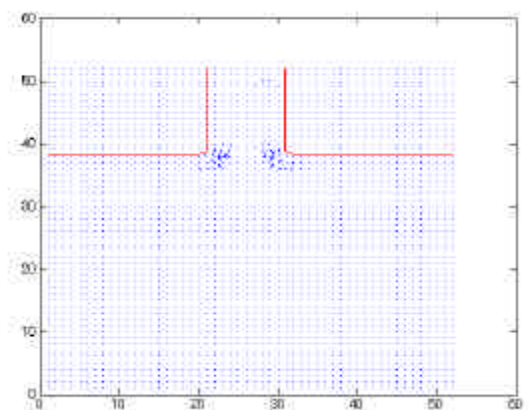
結果1 液体界面流速分布



結果2 液体流速分布



結果 3 気体界面流速分布



結果 4 気体流速分布

6. 結論

液体流速の計算は、界面流速や液体外挿流速ともに良好な結果と思われる。気体流速の結果は時間更新が行われていないにも関わらず界面流速が確認でき、その結果思わぬ外挿流速が発生していた。また界面の外挿流速が発生している場所で、数値計算が不安定になっていることが確認できているので、今後は気体側の計算方法の検証を行っていく。

参考文献

- 1) Stuart D.Smith, Christopher W. Fairall, Gerald L. Geernaert, Lutz Hasse, 1996. AIR-SEA FLUXES: 25 YEARS OF PROGRESS. Boundary-Layer Meteorology 78: 247-290
- 2) Sarpakaya, 1996. Vorticity, free-surface, and surfactants. Annu. Rev. Fluid Mech. 28: 83-128
- 3) Longuet-Higgins M S 1992, Capillary rollers and bores, J. Fluid Mech. 240, 659-679