Ｂ－１２　平成22年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第67号

河床低下を伴う砂州の線形安定解析

Linear stability analysis of fluvial bars with bed degradation

北海道大学大学院工学院　○学生員　高畑知明　(Tomoaki TAKAHATA)
北海道大学工学研究院　正会員　泉典洋　(Norihiro IZUMI)

1　はじめに

近年，河床低下が生じている河川が全国的に見られるようになっている．例えば石狩川上流域では，河床低下によって澪筋が固定され，さらに河床低下が進んだために基盤岩が露出するといった事例が報告 [1] されている．このような河床低下が発生すると，河川構造物の基礎が不安定になったり, 河床低下に伴う澪筋の固定によって砂州の更新が行われなくなり砂州の樹林化が促進され洪水疎通能力を阻害したり，生態系の多様性が失われたりするなど，治水・環境面に大きな問題が生じることになる．このようなことから河床低下が砂州に与える影響についての知見が求められている．

土砂供給量の変化が砂州や河床変動に与える影響に関する研究事例は多くない．その中で，長田ら [2] は，土砂供給量の急減により交互砂州の波長は増加し波高は低くなることを数値解析によって示している．また，三輪ら [3] は，流量や土砂供給量の不均衡による河床低下・上昇やそれらに起因する河床勾配の変化が砂州河床の変動及び形状特性に及ぼす影響に関する実験を行っている．三輪らの実験によると，交互砂州河床において土砂供給量を減少させた直後は波長が長い砂州が形成されること，砂州の発達は抑制され一時的な砂州の消滅が見られることなどが明らかとなっている．

それに対して砂州の安定性解析では, 土砂供給量の増減が砂州の発生や形状に与える影響を対象としたものは著者らの知る限り未だ存在していない．従来の砂州の安定性解析では, 河床勾配を一定として扱っており, 土砂供給量の増減による河床上昇や低下の影響については考慮に入れられていない. そこで本研究では，WKBJ 法 [4, 5] を用いて，土砂供給量の減少による河床低下速度を微小パラメータとして砂州の線形安定解析に導入し，河床低下によって砂州の形成がどのような影響を受けるのかを理論的に明らかにする．

2　支配方程式

準定常の仮定を用い，河床形状の時間変化は流れの時間変化に比較して十分に遅く，流れの時間微分項は十分に小さくなり無視できると仮定する．そのとき幅一定の開水路の流れは次の無次元化された浅水流方程式で表せる．

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+F^{-2}\frac{\partial H}{\partial x}+F^{-2}\frac{\partial Z}{\partial x}+\beta C_f\left(-\sigma+\frac{(U^2+V^2)^{1/2}U}{H}\right)=0 \tag{1}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+F^{-2}\frac{\partial H}{\partial y}+F^{-2}\frac{\partial Z}{\partial y}+\beta C_f\frac{(U^2+V^2)^{1/2}V}{H}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial UH}{\partial x}+\frac{\partial VH}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および横断方向の座標，U および V はそれぞれ x および y 方向の流速成分，H は水深，Z は河床高さの平坦床基本状態からのずれ，F は等流状態におけるフルード数，β は川幅水深比，C_f は抵抗係数を表している．C_f は簡単のため定数と仮定する．また σ は注目している地点での平均河床勾配 S_0 で正規化した河床勾配であり流下方向にゆっくり変化すると仮定し，次式で表す．

$$\sigma=\frac{S}{S_0} \tag{4}$$

河床の時間変化は土砂の連続式から次のように表される．

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\partial Q_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{by}}{\partial y}=0 \tag{5}$$

ここで x および y 方向の無次元の土砂輸送量 Q_{bx} および Q_{by} は Meyer-Peter and Müller 式を用いて次のように表されるとする [6]．

$$(Q_{bx},Q_{by})=Q_b\,(\cos\phi,\sin\phi) \tag{6}$$

$$Q_b=8\left(\theta_0(U^2+V^2)-\theta_c\right)^{3/2} \tag{7}$$

$$\sin\phi=\frac{V}{(U^2+V^2)^{1/2}}-\frac{r}{\beta\theta_0^{1/2}(U^2+V^2)^{1/2}}\frac{\partial Z}{\partial y} \tag{8}$$

ここで θ_0 は平坦床基本状態におけるシールズせん断力であり，θ_c は掃流限界でのシールズせん断力 $(=0.047)$ である．また r は局所勾配の影響を表す無次元パラメータであり，Colombini et al.[6] によると 0.3 程度の値を取るという．ここでもこの値を用いることとする．

上式には $\sim$ の付いたものを次元量として，以下のような無次元化を導入している．

$$(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{B}\,(x,y)\,,\quad \left(\tilde{U},\tilde{V}\right)=\tilde{U}_0\,(U,V) \tag{9,10}$$

$$\left(\tilde{H},\tilde{Z}\right)=\tilde{H}_0\,(H,Z)\,,\quad \tilde{t}=\frac{(1-\lambda_p)\tilde{H}_0\tilde{B}}{(R_sg\tilde{d}_s^3)^{1/2}}t \tag{11,12}$$

$$\left(\tilde{T}_{bx},\tilde{T}_{by}\right)=\rho C_f\tilde{U}_0^2\,(T_{bx},T_{by}) \tag{13}$$

$$\left(\tilde{Q}_{bx},\tilde{Q}_{by}\right)=\left(R_sg\tilde{d}_s^3\right)^{1/2}(Q_{bx},Q_{by}) \tag{14}$$

ここで $\tilde{B}$ は川幅，$\tilde{U}_0$ および $\tilde{H}_0$ はそれぞれ注目している場所での等流流速および等流水深である．λ_p は土砂の空隙率，ρ は水の密度，R_s は土砂の水中比重であり，通常は 1.65，$\tilde{g}$ は重力加速度，$\tilde{d}_s$ は土砂の粒径を表す．無次元化された底面せん断力ベクトル (T_{bx},T_{by}) は次のように書き表される．

$$(T_{bx},T_{by})=\left(U^2+V^2\right)^{1/2}(U,V) \tag{15}$$

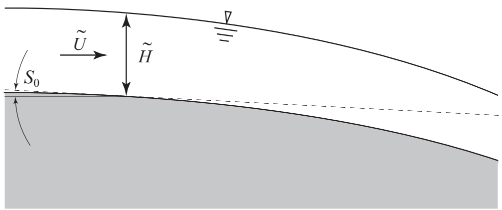

図- 1 河床が低下傾向にある場合の流れの概念図

またシールズせん断力は次のように表される．

$$\theta = \theta_0 \left(U^2 + V^2\right) \tag{16}$$

ここで θ_0 は平坦床基本状態における θ であり，次のように表される．

$$\theta_0 = \frac{\tilde{T}_{b0}}{\rho R_s g \tilde{d}_s} = \frac{C_f \tilde{U}_0^2}{R_s g \tilde{d}_s} = \frac{\tilde{H}_0 S_0}{R_s \tilde{d}_s} \tag{17}$$

ここで $\tilde{T}_{b0}$ は注目している地点における平坦床基本状態における底面せん断力である．

3　弱非平衡状態の線形安定性理論

3.1　一次元基本状態

まず河床が低下している場合の河床の縦断形状や流れを考えてみる．Gessler[7] による簡易な理論を用いた計算でもわかるように，土砂供給量が減少した場合，上流端から供給土砂量に見合った勾配に減少し，その変化が徐々に下流に伝わって全体の勾配が小さくなっていく．また，その過程で**図**-1 のように上に凸の縦断形状が現れる．このような縦断形状が現れると流れは下流方向に加速されるため，土砂輸送量も下流に行くにしたがって大きくなる．そうすると河床上の流送土砂のバランスから河床は低下していくことになる．

本研究でも河床低下は上流からの土砂供給量の多寡によって発生するとする．

また，問題を簡単にするため，一様な速度で河床低下している状況を考える．下流端や上流端が固定されている場合，一様な速度で河床低下しているような状況はあり得ないが，考えている領域が下流端から十分遠く離れているような場合は下流端の影響はゆっくりしか現れないため，短期的に見るとほぼ一様に河床低下しているとみなしてよい．

さらに河床低下は通常の河床変動と比べると非常に長い時間かけて進行すると仮定する．すると河床勾配の場所的な変化は非常に小さく，ある区間を取り出して考えるとほぼ一様勾配な水路と考えて差しつかえない．すなわち河床勾配が有意に変化する距離に比べると砂州の波長の長さスケールは十分に小さいと仮定する．実河川を例に挙げると，先に挙げた石狩川上流 [1] の河床低下区間は約 8km であり，低水路幅が約 100 m ほどである．このとき砂州の波長は 0.5 km から 1 km となり，砂州のスケールは河床勾配が変化する長さスケールの 1/8 から 1/16 となる．以下では WKBJ 法や多重尺度法の考え方を用い，この二つの長さスケールの比を微小パラメータとした二重展開を行う．

いま河床高がゆっくりと低下しているとし，河床の低下速度を $-\epsilon$ と表す．そのとき次式が成立する．

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} = -\epsilon \tag{18}$$

この ϵ を微小パラメータとした WKBJ 法 [4)5)] を用いて弱非平衡状態を表し線形安定解析を行う．先に述べたように WKBJ 法では砂州のスケール程度の長さスケールを表す流下方向座標 x_0 の他に，河床低下・上昇速度に対応した河床勾配の変化を表す長さスケール x_1 を導入する．河床勾配が変化すれば，流速および水深も変化する．すなわち，河床勾配，流速および水深は流下方向にゆっくりと変化しており，x_0 のスケールで見ると一定であるが，x_1 のスケールで見ると変化していると考えることができる．x_0 および x_1 はそれぞれ次のように定義される．

$$x_0 = x, \quad x_1 = \epsilon x \tag{19}$$

すると x 微分は次のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{20}$$

これに応じて，x 方向の流速，水深および河床勾配についても ϵ で展開する．すなわち次のような展開を導入する．

$$\begin{aligned}(U, H, \sigma) = &\left(U_{00}(x_1), H_{00}(x_1), \sigma_0(x_1)\right) \\ &+ \epsilon \left(U_{01}(x_1), H_{01}(x_1), \sigma_1(x_1)\right)\end{aligned} \tag{21}$$

ここで U_{00} を初めとする全ての変数は x_1 の関数となる．

式 (20) および (21) を式 (1)–(3) および式 (5) に代入し ϵ のオーダーで整理し解くと，$O(\epsilon)$ のオーダーまでの解は次のように得られる．

$$U_{00} = \left\{ \left[\left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} + \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{1/2}, U_{01} = 0 \tag{22}$$

$$H_{00} = \left\{ \left[\left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} + \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{-1/2}, H_{01} = 0 \tag{23}$$

$$\sigma_0 = \left\{ \left[\left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} + \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{3/2} \tag{24}$$

$$\sigma_1 = \beta^{-1} C_f^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_{00}^2}{2} + F^{-2} H_{00}\right) \tag{25}$$

図-2 に河床低下が生じている場合の U_{00} および H_{00} の流下方向変化を示した．河床が低下傾向にある場合，流れは下流方向に加速され，それに伴って水深が小さくなっている様子がわかる．**図**-3 および**図**-4 にそれぞれ σ_0 および σ_1 の流下方向変化を示した．d_s は等流水深で無次元化された土砂の粒径であり，以下でも同様とする．河床低下が生じている場合，河床勾配は流下方向に増加すること，すなわち上に凸の縦断形状が形成されることがわかる．また，σ_1 は川幅水深比 β に依存する．ここでは，$\beta = 50$ および 100 のケースについて図示した．川幅水深比が小さいほど，河床勾配の変化が大きいことが分かる．

3.2　二次元摂動問題

河床に対して流下方向にサイン型の進行波擾乱を与える．また前節に倣って弱非平衡性を表す微小パラメータ ϵ を用

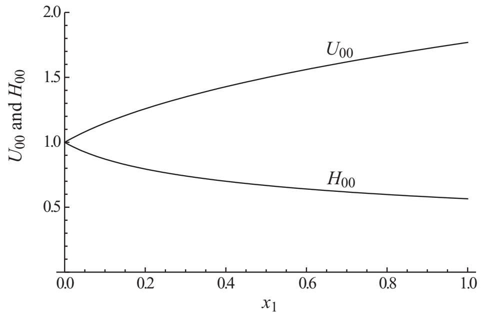

図- 2 河床が低下傾向にある場合の一次元基本状態における流速 U_{00} および水深 H_{00}．$\theta_0 = 0.1$.

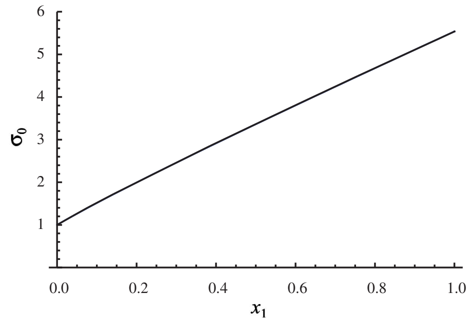

図- 3 河床が低下傾向にある場合の一次元基本状態における正規化された河床勾配 σ_0.　$\theta_0 = 0.1$.

いて次のような摂動展開を導入する．

$$
\begin{bmatrix} U \\ H \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{00}(x_1) + \epsilon U_{01}(x_1) \\ H_{00}(x_1) + \epsilon H_{01}(x_1) \\ Z_{00}(x_1) + \epsilon Z_{01}(x_1) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} U_{10}(x_1) + \epsilon U_{11}(x_1) \\ H_{10}(x_1) + \epsilon H_{11}(x_1) \\ Z_{10}(x_1) + \epsilon Z_{11}(x_1) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_0 - \omega t)} \cos j\pi y \tag{26}
$$

$$
V = A\left[V_{10}(x_1) + \epsilon V_{11}(x_1)\right] \exp \mathrm{i}(kx_0 - \omega t) \sin j\pi y \tag{27}
$$

また複素角周波数 ω も次のように展開する．

$$
\omega = \omega_0(x_1) + \epsilon\omega_1(x_1) \tag{28}
$$

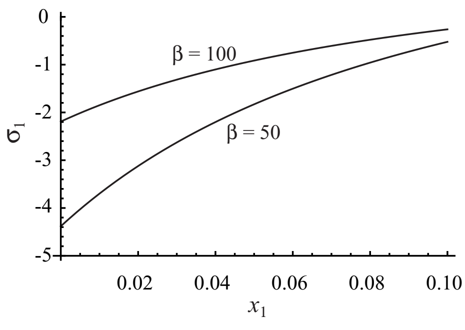

図- 4 河床が低下傾向にある場合の一次元基本状態における正規化された河床勾配 σ_1 . $d_s = 0.02$, $\theta_0 = 0.1$.

上式を式 (1)–(3) および式 (5) に代入し ϵ および A を微小パラメータとしてそれらのオーダーで整理すると，それぞれのオーダーで次のような結果が得られる．なお，$O(\epsilon^1 A^0)$ からは，一次元基本状態で求めた U_{00} および σ_1 が得られる．

(1)　$O(\epsilon^0 A^1)$

$O(\epsilon^0 A^1)$ では次式が得られる．

$$
L\vec{U}_{10} = 0 \tag{29}
$$

ここで

$$
L = [l_{ij}]\,, \quad \vec{U}_{10} = [U_{10}, V_{10}, H_{10}, Z_{10}]^T \tag{30a, b}
$$

$$
\begin{gathered}
l_{11} = \mathrm{i}kU_{00} + 2\beta C_\mathrm{f} U_{00}^2,\ l_{12} = 0,\ l_{13} = \mathrm{i}kF^{-2} - \beta C_\mathrm{f} U_{00}^4, \\
l_{14} = \mathrm{i}kF^{-2}, \quad l_{21} = 0, \quad l_{22} = \mathrm{i}kU_{00} + \beta C_\mathrm{f} U_{00}^2, \\
l_{23} = -j\pi F^{-2}, \quad l_{24} = -j\pi F^{-2}, \quad l_{31} = \mathrm{i}kH_{00}, \\
l_{32} = j\pi H_{00},\ l_{33} = \mathrm{i}kU_{00},\ l_{34} = 0, \quad l_{41} = \mathrm{i}k\, Q_1(U_{00}), \\
l_{42} = j\pi\, Q_2(U_{00}),\ l_{43} = 0,\ l_{44} = -\mathrm{i}\omega_0 - (j\pi)^2 Q_3(U_{00})
\end{gathered} \tag{30c}
$$

$$
Q_1(U_{00}) = \left.\frac{\partial Q_{bx}}{\partial U}\right|_{U=U_{00}, V=0, \frac{\partial Z}{\partial y}=0} \tag{31a}
$$

$$
Q_2(U_{00}) = \left.\frac{\partial Q_{by}}{\partial V}\right|_{U=U_{00}, V=0, \frac{\partial Z}{\partial y}=0} \tag{31b}
$$

$$
Q_3(U_{00}) = \left.\frac{\partial Q_{by}}{\partial \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)}\right|_{U=U_{00}, V=0, \frac{\partial Z}{\partial y}=0} \tag{31c}
$$

式 (29) が自明な解以外の解を持つためには次式が成立する必要がある．

$$
|L| = 0 \tag{32}
$$

ただし L 中の U_{00} および H_{00}，Z_{00} は x_1 の関数であるので，ω_0 も x_1 の関数となる．すなわち ω_0 は次のような関数形となる．

$$
\omega_0 = f_0\left(k, \beta; j, F, C_f, \theta_0, x_1\right) \tag{33}
$$

(2)　$O(\epsilon^1 A^1)$

$O(\epsilon^1 A^1)$ では次式が得られる．

$$
L\vec{U}_{11} = \vec{N} \tag{34}
$$

ここで

$$
\vec{U}_{11} = [U_{11}, V_{11}, H_{11}, Z_{11}]^T \tag{35}
$$

$$
\vec{N} = \begin{bmatrix} -\left(U_{00}U_{10}\right)' - F^{-2}\left(H_{10} + Z_{10}\right)' \\ -U_{00}V_{10}' \\ -\left(U_{00}H_{10}\right)' - \left(U_{10}H_{00}\right)' \\ \mathrm{i}\omega_1 Z_{10} - \left(Q_1(U_{00})\, U_{10}\right)' \end{bmatrix} \tag{36}
$$

L は特異行列であるので，式 (34) が解を持つためには行列 L の列の一つを $\vec{N}$ と交換した行列の行列式がゼロとならなければならない．その条件を用いれば ω_1 が次のような形で得られる．

$$
\omega_1 = f_1\left(k, \beta; j, F, C_f, x_1\right) \tag{37}
$$

ただし，式 (34) を解くためには $\vec{U}_{10}$ とその x_1 微分を求める必要がある．$\vec{U}_{10}$ は式 (29) を解いて得られる．またそれらの x_1 微分は式 (29) を x_1 で微分した次式から得られる．

$$
L\vec{U}_{10}' = -L'\vec{U}_{10} \tag{38}
$$

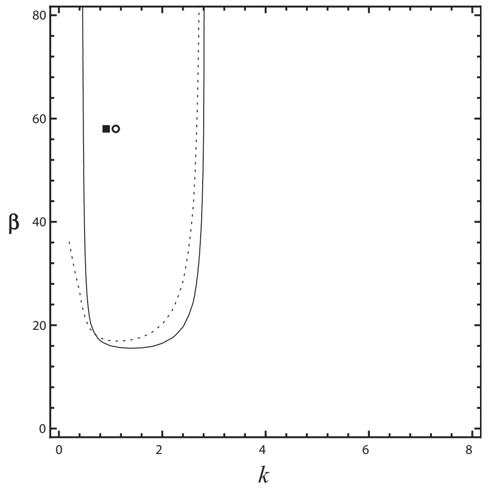

図- 5 寺本ら [8] の実験 (A, A1) との比較 ($j = 1$．$d_s = 0.10$．$\theta_0 = 0.059$.$\epsilon = 0.0040$．**○:河床勾配が一定の場合，■:河床低下の場合．**)

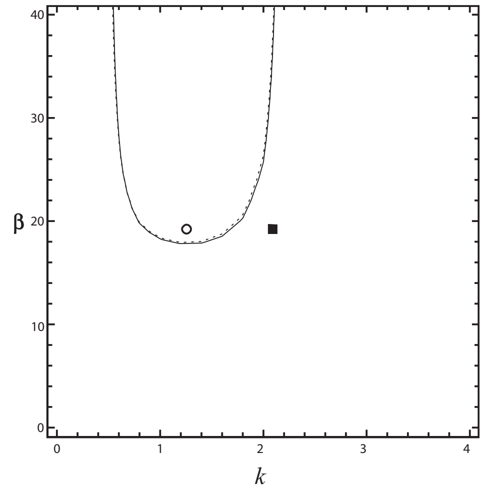

図- 6 三輪ら [3] の実験 (U80-B) との比較 ($j = 1$．$d_s = 0.11$．$\theta_0 = 0.096$.$\epsilon = 0.00087$．**○:河床勾配が一定の場合，■:河床低下の場合．**)

4　結果と考察

増幅率 $\omega_0 + \epsilon\omega_1 = 0$ となる中立曲線を，河床勾配が一定の場合は実線で，河床が低下傾向にある場合は点線でそれぞれ描いたのが**図**-5 および**図**-6 である．ここで，縦軸はアスペクト比 β，横軸は波数 k である．中立曲線の上側で増幅率は正となり，平坦床は不安定となって砂州が形成されることを意味している．

図-5 から分かるように，河床が低下傾向にある場合，波数の大きな領域で河床が安定化している．また，中立曲線が波数の小さい領域に拡大している．さらに，臨界アスペクト比（不安定となる最小のアスペクト比）が大きくなっている．これは，河床が低下している場合，平坦床は安定となり砂州が形成されにくくなることを意味している．以上から，一般に，河床が低下傾向にある場合は砂州が発生しにくくなり，波数の小さい（波長の大きい）砂州が形成されることが理論的に言える．

解析結果を寺本ら [8] および三輪ら [3] の実験結果と比較する．両者は同じ流量で，(a) 河床勾配が平衡となる供給土砂量を与えた場合と (b) 供給土砂量がそれより少なく河床低下が起きる場合で実験を行っている．(a) の場合の中立曲線を実線で，また，その時の波数を○点で，(b) の場合の中立曲線を点線で，また，その時の波数を■点で安定性ダイアグラムに示したのが**図**-5 および**図**-6 である．寺本らの実験はアスペクト比が大きい場合，三輪らの実験はアスペクト比が小さい場合である．**図**-5 から分かるように，アスペクト比が大きい場合は河床が低下している時に発生する砂州の波数は小さくなり，解析結果と合致する．しかし，**図**-6 から分かるように，アスペクト比が小さい場合は河床が低下している時に発生する砂州の波数は大きくなり，解析結果と合致しない．本解析では，上に凸の河床形状のまま一定速度で河床が低下をしている場合を考えているが，実験 [8][3] では，上流端付近の勾配が小さくなっていくため，解析結果と理論結果が合わなかったと考えられる．

5　おわりに

河床低下の無次元速度を微小パラメータとし，WKBJ 法を用いた線形安定解析を行った．解析結果によると，河床が低下している場合，砂州は発生しにくくなり，波長の長い砂州が形成される．

アスペクト比の大きい場合では解析結果は実験結果と一致したが，アスペクト比が小さい場合では一致しなかった．今後，さらなる検討が必要である．

参考文献

1) 松本勝治，田代隆志，根本深: 石狩川上流における河床低下について, 第 52 回北海道開発技術研究発表会資料, 2009.
2) 長田信寿，村本嘉雄，内倉嘉彦，細田尚，矢部昌之，高田保彦，岩田通明: 各種河道条件下における交互砂州の挙動について，水工学論文集，第 43 巻, pp.743-748, 1999.
3) 三輪浩，大同淳之，片山智仁: 交互砂州河床の変動に及ぼす流量・土砂供給条件の影響，水工学論文集，第 51 巻, pp.1051-1056, 2007.
4) Seminara, G. and P. Hall: Linear stability of slowly varying unsteady flows in a curved channel, *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 346, pp.279-303, 1975.
5) Eagles, P. M. and M. A. Weissman: On the stbility of slowly varying flow: the ivergent channel, *J. Fluid Mech.*, 69, part 2, pp.241-262, 1975.
6) Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.: Finite amplitude alternate bars, *J. Fluid Mech.*, Vol.181, pp.213-232, 1987.
7) Gessler, J: Aggradation and degradation River Mechanics, Edited by H. W. Shen, Chapter 8, Water Resources Publications, USA, 1971.
8) 寺本敦子，辻本哲郎: 流量，土砂流入条件が砂州の変動に及ぼす影響の一考察，河川技術論文集，第 10 巻, pp.273-278, 2004.