

数値解析に見る混合ハイブリッド有限要素法の特徴について

A characteristic of Mixed-hybrid FEM on Numerical Analysis

北海道大学工学部	○学生員	蓮池翔太郎(Shotaro Hasuike)
北海道大学工学研究所	学生員	土屋 健司(Takeshi Tsuchiya)
北海道大学工学研究院	フェロー	蟹江 俊仁(Shunji Kanie)
大成建設(株)	正会員	鈴木 俊一(Shunichi Suzuki)

1. 研究目的とその背景

混合ハイブリッド有限要素法(MHF)は、目的変数を複数与える混合形式を用い、支配方程式を異なる離散化手法で解析するという点において一般的な有限要素法(FEM)とは大きな違いがある。非圧縮流体の流れの問題を考えた場合、目的変数が各節点に与えられる FEM と異なり、要素境界面上の流速ベクトルが直接的に目的変数となっていることが大きな特徴である。このため接合要素の隣接面における流速ベクトルの連続性の精度が上がることを期待される。

例えば、透水係数の比が極めて大きい領域を持つ地下水流動問題を解析する場合に、目的変数を境界に設定するため圧力や流速ベクトルの連続性を保証できるという点において有用性が指摘されている。

本研究では、MHF の特徴を概説し、二次元 Laplace 方程式解析モデルで有限差分法(FDM)と比較することで、基礎的な特性を把握することを目的とする。

2. 有限差分法

比較のため、FDM による定式化を示す。支配方程式として、以下のような二次元 Laplace 式を与える。

$$k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

有限差分法は、計算領域を直方体の格子で区切り、隣り合う格子や面に入出入りする物質量の収支を計算する。中央差分を適用して着目する点に関する差分方程式を立て、それを目的変数の数だけ連立させて解を得る方法である。有限差分法により(1)は以下のように定式化される。

$$k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = k \left\{ \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{S_x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{S_y^2} \right\} = 0 \quad (2)$$

この手法は、解析領域を格子に分割する必要があるので任意の形状を表現するのが難しいというデメリットがあるが、理論が比較的単純で計算処理が少ないというメリットがある。

3. 混合ハイブリッド有限要素法

3-1 Raviart-Thomas 型 shape function

x 方向に平行な二辺ならびに y 方向に平行な二辺の四辺で構成される矩形領域 Ω_k において、次のような shape function を適用

する。

$$[w] = \begin{bmatrix} w_{1,x} & w_{2,x} & w_{3,x} & w_{4,x} \\ w_{1,y} & w_{2,y} & w_{3,y} & w_{4,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{S_x S_y} & 0 & \frac{(x-S_x)}{S_x S_y} \\ \frac{(y-S_y)}{S_x S_y} & 0 & \frac{y}{S_x S_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

この shape function はベクトルであり、次元を持っていることが特徴である。次元を持っていることについては、shape function に座標を入力した際に、(1/長さ)という結果になる。これは、境界上において流入量を $\bar{Q}_i$ として与えた際に、 $\bar{Q}_i$ がすでに流入する辺長の影響を見込んでいるためで、内部における単位長さあたりの流速ベクトル $\bar{q}$ を表現するためには、流入する辺の長さで除してやる必要があるためである。また、ベクトルであることにより Ω_k 内の流速 q_x, q_y を補間できる。以上から Ω_k 内の、任意の位置 (x, y) における流速ベクトル $\bar{q}(x, y)$ が次式のように推定される。

$$\bar{q}(x, y) = [\bar{Q}]^T [w]^T \quad (4)$$

3-2 混合化形式による支配方程式の離散化

MHF では混合化形式で定式化するので、支配方程式は以下のとおりである。

$$k \nabla \Phi = -\bar{q} \quad \text{ダルシー則} \quad (5)$$

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad \text{質量保存則} \quad (6)$$

混合形式による解析では、目的変数の増加でマトリックスが増加したり支配方程式のタイプによっては解析できないので数値計算上の工夫が必要である。また各々の変数に対する微分階数が少ないため、目的変数の微分値に関しても精度のよい結果が得られるという長所がある。

MHF では線形の shape function を用いた FEM によりダルシー則を、有限体積法(FVM)により質量保存則を、それぞれ離散化する。このように混合形式で表現された支配方程式に対して異なる離散化手法を適用することが特徴である。

ダルシー則は Green の定理を適用して弱形式化することで以下のように離散化できる。

$$[M][\bar{Q}] = k \Phi_k - k \{\bar{\phi}\} \quad (7)$$

$$[M] = \int_{\Omega_k} [w]^T [w] d\Omega_k \quad (8)$$

質量保存則に FVM を適用して、次式のように離散化できる。

$$\sum_i^n \bar{Q}_i = 0 \quad (9)$$

(7)と(9)から要素の各境界からの流出入量 $\{\bar{Q}\}$ は次のように表される。

$$\{\bar{Q}\} = k\Phi_k [M]^{-1} - k[M]^{-1} \{\bar{\phi}\} \quad (10)$$

さらに(9)と(10)より、連立方程式を解いて、

$$\Phi_k = \frac{1}{4} (\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_3 + \bar{\phi}_4) \quad (11)$$

よって、領域内の代表値 Φ_k は要素の境界上の $\bar{\phi}$ の平均で表されることがわかる。これらをまとめると、

$$[K]\{\bar{\phi}\} = \{\bar{Q}\} \quad (12)$$

$\bar{\phi}$ のみの式となり、境界条件を導入することでこれを求めることができる。

4. 解析モデル

図 1 のようなポテンシャル流れ場における MHF, FDM それぞれの方法による解析を考える。図中央の灰色部分で透水係数が $k = 0.01$ 、その他の部分で $k = 1$ となっている。図の左側を上流、右側を下流として上流側の辺上で $\phi = 1$ 、下流側の辺上で $\phi = 0$ とする(Dirichlet 条件)。また上下の境界では y 方向に流入、流出がないものとした(Neuman 条件)。

辺の長さを一定にし、要素の分割数を変えて各方法における流入量の違いを比較する。

5. 解析結果

図 2 に示すように、ポテンシャル流れの流線を描くと領域の中央部分に水が進入せずに流れていることわかる。解析モデルの中央付近において、 k を変えて流れにくくしたことが反映された結果となっている。

図 3 は、図 1 の上流側の境界における、分割数の違いと流速分布の関係を表している。境界の中心付近で流速は小さくなっており、不透水要素の影響が顕著に出ている。分割数の増加によって、より正確な流速分布が得られるものと考えられる。

図 4 は、図 3 の結果から計算した流入量を、MHF による境界の分割数が 30 のときの値を基準値として、両手法と各分割数による割合の違いを示している。流入量の値も同様に要素分割を増やすにつれ、近似解の数値は収束する傾向を示している。MHF では FDM に比べて分割数がかなり少ない段階において、すでに基準値に近い値が得られることが確認できる。

具体的には、FDM では y 軸分割数が 6 のとき基準値に対して 83.0%である一方、MHF については 98.3%という高い精度が得られる。

6. 考察とまとめ

FDM では節点で流速を求めた後、それを流入境界上に振り分けて流入量を算出するのに対して、MHF では境界上に目的変数をおくので、各境界で足し合わせるにより直接これを算

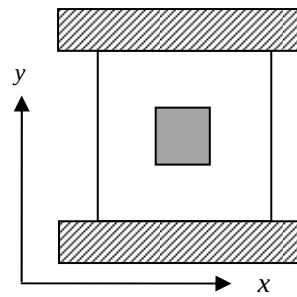


図 1 解析モデル

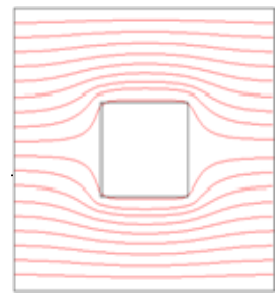


図 2 MHF 解析による流線

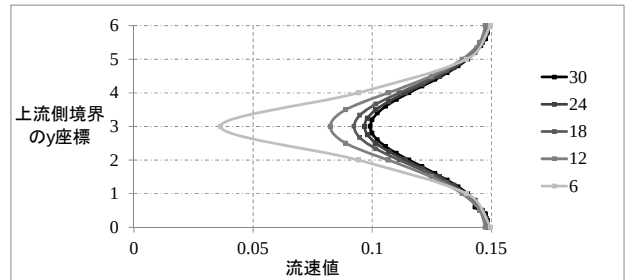


図 3 流入流速分布の分割数による違い (FDM)

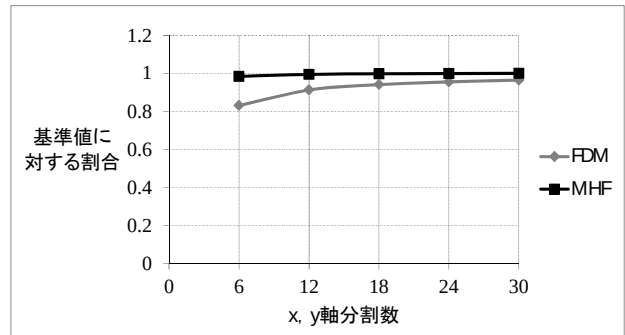


図 4 分割数、手法による流入量の収束性の違い

出できる。これが、収束性の違いを生む要因と考えられる。要素分割を増やすにつれ、近似解の数値が収束するような問題においては理論解により近い正確な流量の計算ができるものと考えられる。

以上より、本研究の知見を整理すると以下の通りである。

- 二次元 Laplace 方程式の離散化を通じて MHF における shape function, 離散化の手法などの特徴が明らかになった。
- 境界上に目的変数を設定した上、ハイブリッド形式の離散化を行うことで精度のよい解が得られることが確認された。
- 特に、透水係数が著しく小さい領域を有する非圧縮流れのモデルを解析する際、少ない分割数でも流入量や流速ベクトルの収束性が高いことが確認できた。

7. 参考文献

- 1) Brezzi, F. and Fortin, F. : Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1991
- 2) Mose, R., Siegel, P., Ackerer, P., and Chavaent, G. : Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?, Water Resources Research, Vol. 30, No. 11, pp.3001-3012, 1994.