

# 変位場の採り方が厚板の変位と応力に与える影響

Effect of selecting the displacement field on displacements and stresses of thick plates

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)  
 函館工業高等専門学校 学生会員 濱田哲司 (Satoshi HAMADA)

## 1. まえがき

変位仮定型の厚板理論では、変位を中央面 ( $z=0$ ) で Maclaurin 展開した変位場において、板厚方向座標  $z$  に関して異なる次数までを用いる種々の理論が存在する。例えば、 $z$  の項 ( $z$  軸方向の変位  $w$  には  $z^0$ ) までの変位場を用いる Mindlin<sup>1)</sup> や Reissner<sup>2)</sup> の一次せん断変形理論、 $z^3$  の変位場を用いる Lo<sup>3)</sup> や Kant<sup>4)</sup> の三次せん断変形理論が厚板解析に良く用いられている。さらに高次の変位場を用いる平島らの一般化高次理論<sup>5)</sup> や松永の2次元高次理論<sup>6)</sup> では、変位場を自由に採ることができる。

有限要素法では、一般に Mindlin の一次せん断変形理論が  $C^0$  級の板・シェル要素の定式化に広く用いられている。Kant の三次せん断変形理論に基づいた要素も開発されているが<sup>7)</sup>、一般化高次理論や2次元高次理論のように自由に変位場を規定することができる要素の定式化は、要素細分割法 ( $h$  法) では困難である。

一方、補間関数の高次化法 ( $p$  法) に基づいたハイアラキ要素において、構造全体を三次元体としてモデル化した全体解析を効率的に実施するためにハイアラキ三次元シェル要素が開発されている<sup>8)</sup>。この要素は、ハイアラキソリッド要素において、各種の厚板理論と同じ変位場を規定した要素であり、一般化高次理論や2次元高次理論と同様に変位場を自由に採ることができ、各種の厚板理論に対応した三次元体の要素を容易に作成できる。

本研究では、ハイアラキ三次元シェル要素を厚板解析に用いて、変位場の採り方が変位や応力に与える影響を調べる。

## 2. ハイアラキ三次元シェル要素

### (1) 厚板理論における変位場

変位仮定型の厚板理論では、図-1 に示すように変位  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  を中央面 ( $z=0$ ) を基準に Maclaurin 展開して、板厚方向座標  $z$  に関して異なる次数までを用いる種々の理論が存在する

Lo は面外ひずみと面外応力の曲げへの影響を考慮す

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + z^4 u_4 + z^5 u_5 + z^6 u_6 + \dots \\
 v &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + z^4 v_4 + z^5 v_5 + z^6 v_6 + \dots \\
 w &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + z^4 w_4 + z^5 w_5 + z^6 w_6 + \dots
 \end{aligned}$$

Reissner  
Mindlin  
 $I=1$

Lo  
 $I=2$

Kant  
 $I=3$

(I: 松永の  $I$  次近似式)

図-1 各種の厚板理論における変位場

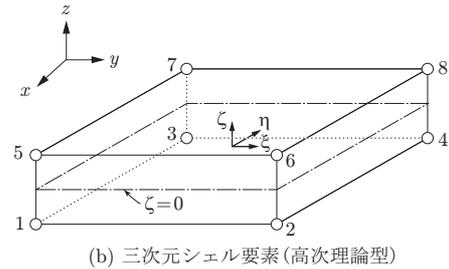
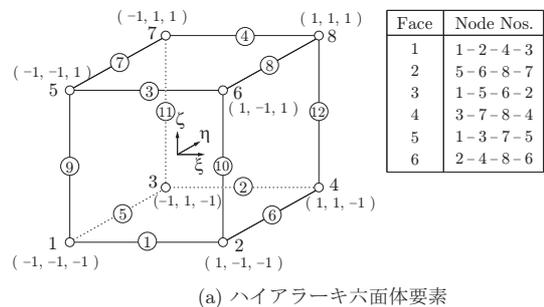


図-2 ハイアラキ三次元シェル要素

るために必要な最小の採り方として、 $u$  と  $v$  に  $z^3$  まで、 $w$  に  $z^2$  までの項を用いている<sup>3)</sup>。それに対して、Kant は Lo 理論の  $w$  について  $z^3$  の項を加えた変位場を用いており<sup>4)</sup>、これら Lo 理論と Kant 理論は三次せん断変形理論と呼ばれている。平島らの一般化高次理論<sup>5)</sup> や松永の2次元高次理論<sup>6)</sup> では、Lo や Kant の変位場よりも  $z$  に関してさらに高次の項までが用いられている。特に、松永は一次せん断変形理論の変位場を1次近似式 ( $I=1$ )、Lo の変位場を2次近似式 ( $I=2$ )、 $u$  と  $v$  に  $z^5$  まで、 $w$  に  $z^4$  までの項を用いた変位場を3次近似式 ( $I=3$ ) と呼んでいる。

### (2) 変位関数

図-2 に示すように、三次元シェル要素には、8個の節点、12本の節線、6つの節面を有する六面体ソリッド要素を用いる。一般化変位には、これらの節点、節線、節面の変位に加えて、体積 (内部) 自由度を有する。

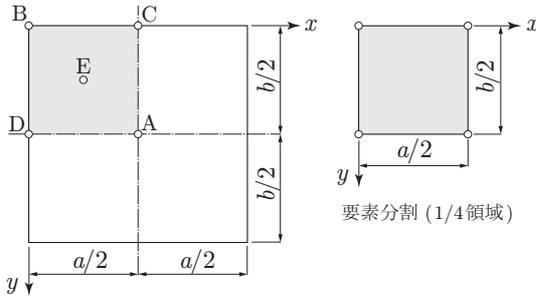


図-3 計算モデルと要素分割

また、要素の図心点に変域  $[-1, 1]$  の自然座標  $\xi, \eta, \zeta$  を設け、 $\zeta$  軸は板の厚さ方向にとるものとし、厚さ方向 ( $\zeta$  軸方向) には要素を分割しない。

要素内の変位を次の変位関数で仮定する<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{L_x} N_{mnl}(\xi, \eta, \zeta) \cdot u_{mnl} \\
 v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{L_y} N_{mnl}(\xi, \eta, \zeta) \cdot v_{mnl} \\
 w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{L_z} N_{mnl}(\xi, \eta, \zeta) \cdot w_{mnl} \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここに、 $u_{mnl}, v_{mnl}, w_{mnl}$  は一般化変位であり、形状関数  $N_{mnl}$  はハイラーキ多項式  $f_k$  の三重積により与えられる。なお、式(1)の  $m, n, l$  は多項式の次数を表す。 $\xi, \eta$  の最大次数は  $M, N$  で、 $\zeta$  の最大次数には  $u, v, w$  に対して  $L_x, L_y, L_z$  を用いる。

### (3) 変位場の規定

式(1)の変位関数において、最大次数  $L_x, L_y, L_z$  の採り方により、図-1に対応した板厚方向座標  $\zeta$  に関する変位場を任意に規定することができる。

例えば、三次せん断変形理論と同じ変位場は、Lo理論に対して式(1)で  $L_x=L_y=3, L_z=2$  と、Kant理論では  $L_x=L_y=L_z=3$  と採れば良い。これらの要素を三次せん断変形理論型要素と呼ぶことにする。また、松永の3次近似式 ( $I=3$ ) と同じ変位場を持つ要素は  $L_x=L_y=5, L_z=4$  と採れば良い。これら高次理論型の要素は、六面体ソリッド要素の変位関数の次数を規定するだけで容易に作成できる。

一方、要素の変位関数において、最大次数  $L_z \geq 1$  に採る必要があることから、図-1に示す一次せん断変形理論 (Mindlin 理論と Reissner 理論) の  $w$  の変位場を表現できない。よって、一次せん断変形理論型の要素では、式(1)の変位関数に  $L_x=L_y=L_z=1$  を用いて、Reissner 理論と Mindlin 理論を満足するように構成方程式を修正して定式化する<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + z^4 u_4 + z^5 u_5 + z^6 u_6 \\
 v &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + z^4 v_4 + z^5 v_5 + z^6 v_6 \\
 w &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + z^4 w_4 + z^5 w_5 + z^6 w_6
 \end{aligned}$$

図-4 変位場の採り方

## 3. 数値計算例

板厚比  $h/b=3/10$  の厚板において、変位場の採り方が変位と応力に与える影響を調べる。

### (1) 計算モデルと変位場の設定

計算モデルは、図-3に示す長さ  $a$ 、幅  $b$ 、厚さ  $h$  の等分布荷重  $q$  を受ける単純支持正方形板 ( $a/b=1$ ) である。板厚比は  $h/b=3/10$  とする。材料定数は、弾性係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu=0.3$  とし、一次せん断変形理論型要素ではせん断補正係数に  $k=5/6$  を用いる。板の1/4領域に、ハイラーキ三次元シェル要素を1要素用いて計算する。

変位場の採り方を図-4に示す。変位場が面外ひずみと面外応力に与える影響を調べるために、Lo理論<sup>3)</sup>に倣い、 $u$  と  $v$  の変位場に対して  $w$  の次数を1次下げた変位場を用いる。図中の  $J=1 \sim 7$  の変位場について計算を行うが、 $J=1$  の採り方は Mindlin や Reissner の一次せん断変形理論の変位場と同じであり、 $J=3$  は Lo理論、 $J=5$  は松永の3次近似式 ( $I=3$ ) と同じ採り方である。なお、本研究のハイラーキ三次元シェル要素は、それぞれの理論に対して極めて高精度の値が得られ、収束性も良好である<sup>8)</sup>。本計算例の変位と応力は、 $x, y$  軸方向の最大次数を  $M=N=10$  として計算した結果を用いている。

また、変位と応力の計算結果は次式により、無次元化して表す。

$$\left. \begin{aligned}
 u^* &= \frac{uD_p}{qb^2}, & v^* &= \frac{vD_p}{qb^2}, & w^* &= \frac{wD}{qb^4} \\
 \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x h^2}{qb^2}, & \sigma_y^* &= \frac{\sigma_y h^2}{qb^2}, & \sigma_z^* &= \frac{\sigma_z}{q} \\
 \tau_{xy}^* &= \frac{\tau_{xy} h^2}{qb^2}, & \tau_{yz}^* &= \frac{\tau_{yz} h}{qb}, & \tau_{zx}^* &= \frac{\tau_{zx} h}{qb}
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $D_p$  と  $D$  は板の伸び剛性と曲げ剛性である。

$$D_p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

### (2) 変位に与える影響

図-5に、D点 ( $x=0, y=b/2$ ) の  $u^*$ 、C点 ( $x=a/2, y=0$ ) の  $v^*$ 、A点 ( $x=a/2, y=b/2$ ) の  $w^*$  の板厚 ( $z$  軸) 方向の分布を示す。変位場  $J=1 \sim 4$  の計算結果を示し

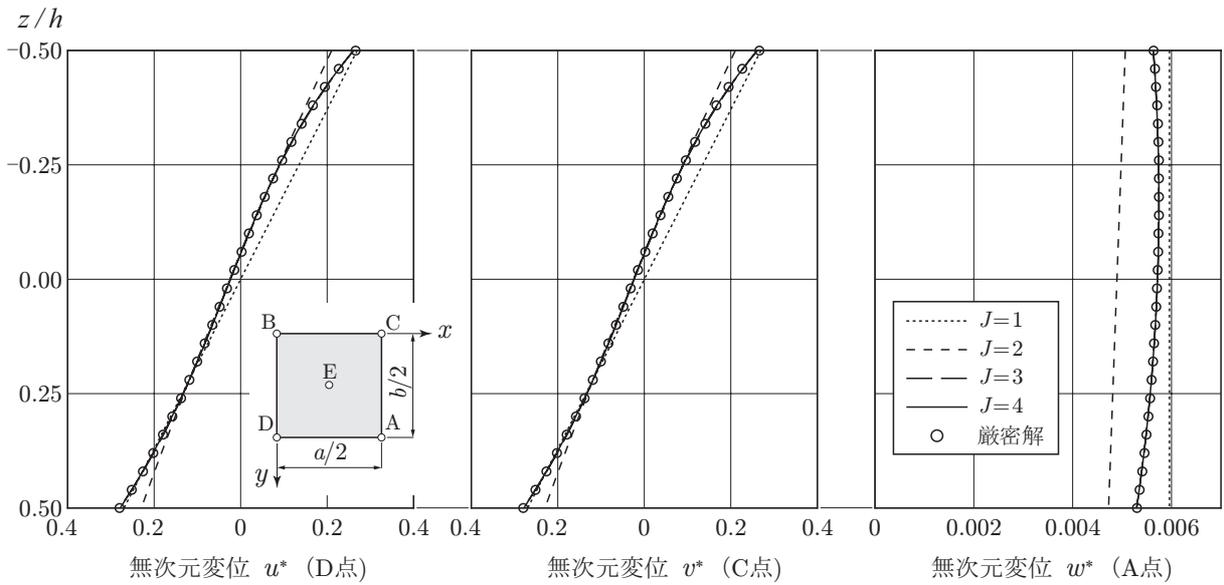


図-5 変位の分布

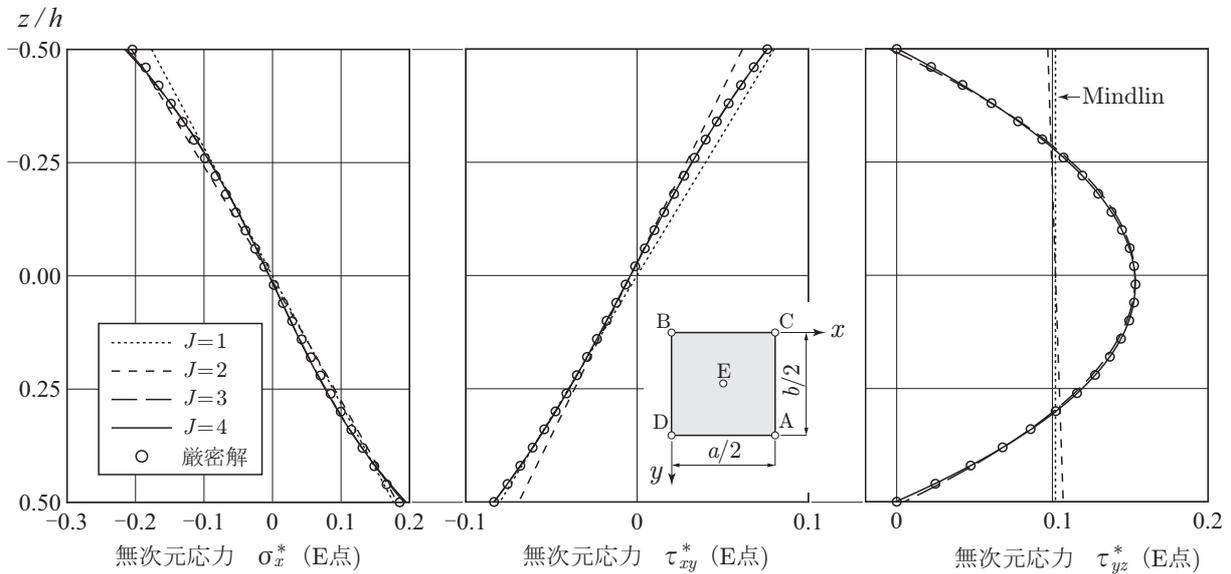


図-6 E点での応力分布

ており、三次元弾性理論による厳密解を○印で示している。

図より、 $J=2$ の変位場による変位はほぼ直線分布となっており、たわみ $w^*$ では $J=1$ に比べて精度が悪くなっている。それに対して、 $J=3$ の変位場による計算結果は、3次関数分布となる $u^*, v^*$ 、2次関数分布となる $w^*$ ともに厳密解と良く一致している。よって、板厚比 $h/b=3/10$ 程度の厚板において、変位を精度良く求めるためには、三次せん断変形理論と同程度の変位場( $J=3$ )が必要となる。

(3) 応力に与える影響

図-6に、E点( $x=a/4, y=b/4$ )の $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*$ の板厚方向の分布を示す。板の内部E点では、変位と同様に $J=3$ を用いれば、板厚方向の応力分布は厳密解と良く一致している。特に、面外せん断応力は、 $J=1, 2$ では

板厚方向にほぼ一定となっており、2次関数分布の $\tau_{yz}^*$ を求めるには最低でも $J=3$ の変位場が必要となる。

図-7にA点( $x=a/2, y=b/2$ )における垂直応力の3成分の板厚方向の分布を示す。なお、変位場 $J=1, 3, 5, 7$ とした結果を示している。図より、面外垂直応力 $\sigma_z^*$ では $J=3$ の変位場を用いても応力の境界条件を満たしていないことが分かる。3次関数分布となる $\sigma_z^*$ の境界条件を満たすためには、 $J=5$ (松永の3次近似式)以上の変位場が必要となる。

図-8には板の周辺におけるせん断応力の3成分の板厚方向の分布を示す。 $\tau_{xy}^*$ についてはB点( $x=y=0$ )、 $\tau_{yz}^*$ はC点、 $\tau_{zx}^*$ はD点での応力分布である。板境界上のせん断応力の分布は、図-6(板内部)に比べて分布形状が複雑となる。境界上のせん断応力の分布を正確に表すためには $J=5$ 以上の極めて高次の変位場が必要

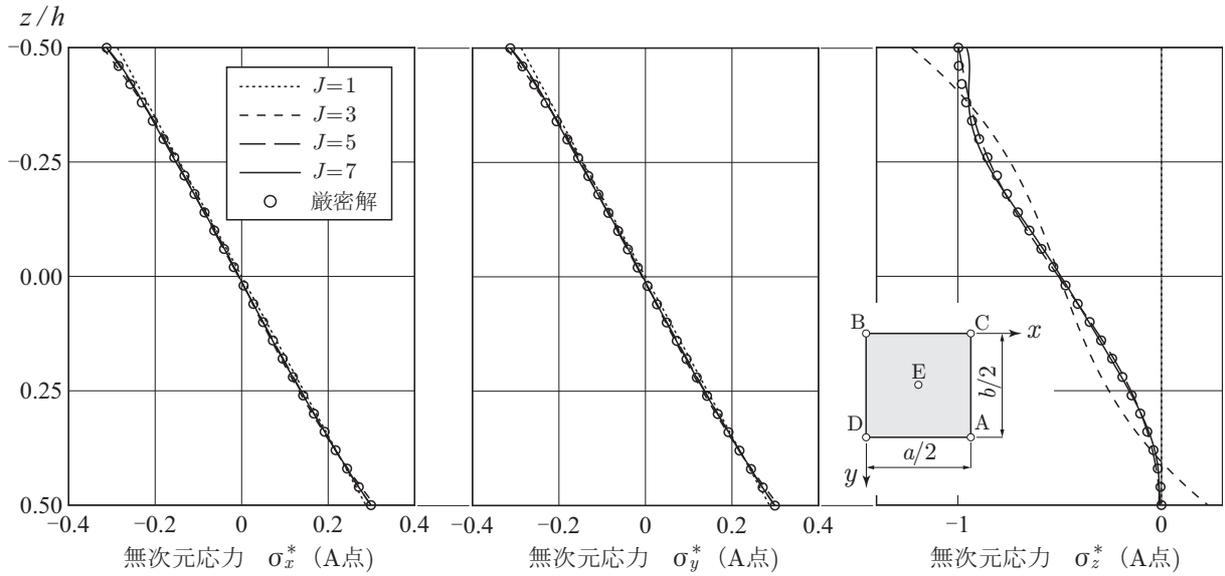


図-7 A点での垂直応力の分布

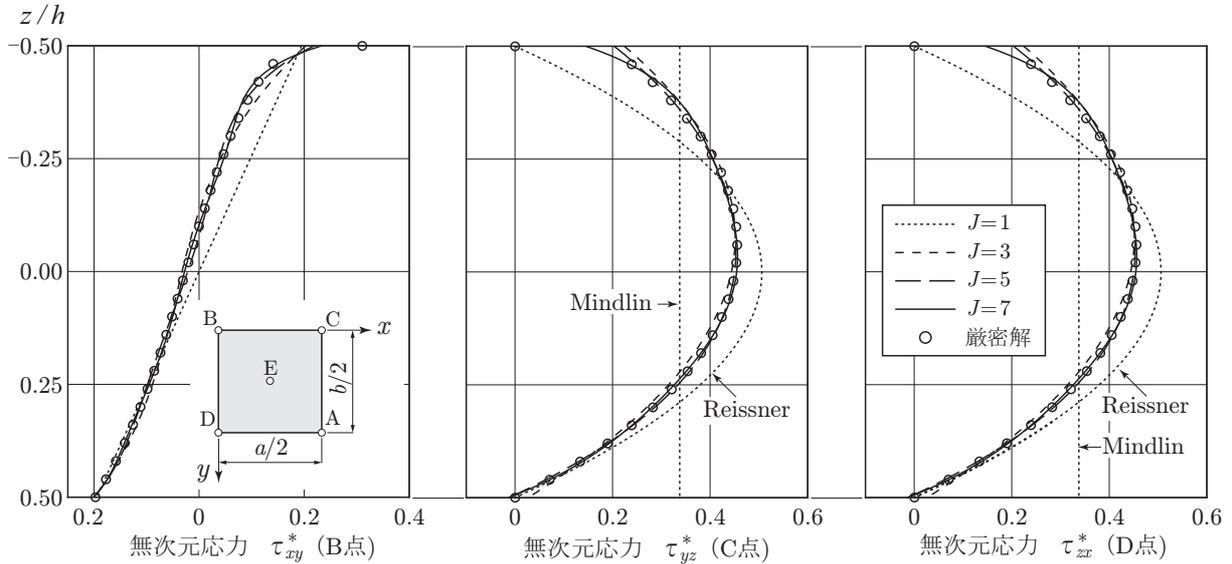


図-8 せん断応力の分布

となる事が分かる。

#### 4. まとめ

ハイラーキ三次元シェル要素を板厚比  $h/b=3/10$  の厚板に用いて、変位場の採り方が変位と応力に与える影響を調べた。面外垂直応力や板境界上での面外せん断応力の板厚方向の分布を正確に計算するためには、極めて高次の変位場が必要になることが分かった。本要素を構造物の全体解析に適用するために、さらに任意の板厚比に対して検討をすすめる必要がある。

#### 参考文献

- 1) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. App. Mech.*, Vol.73, pp.31-38, 1951.
- 2) Reissner, E. : The effect transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. App. Mech.*, Vol.67, pp.A-69-A-77, 1945.

- 3) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M. : A High-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates, *J. App. Mech.*, Vol.99, pp.663-668, 1977.
- 4) Kant, T. and Swaminathan, K. : Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, 56, pp.329-344, 2002.
- 5) 平島健一, 根岸嘉和 : 板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察, 土木学会論文集, No.330, pp.1-14, 1983.
- 6) 松永裕之 : 2次元高次理論による厚板の解析, 日本建築学会構造系論文集, No.367, pp.48-58, 1986.
- 7) Kant, T. and Manjunatha, B.S. : An unsymmetric FRC laminate  $C^0$  finite element model with 12 degrees of freedom per node, *Eng. Comput.*, Vol.5, pp.300-308, 1988.
- 8) 渡辺 力, 林 正 : 変位場を規定するハイラーキソリッド要素の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A, 2010. (掲載予定).