弾性体で満たされた球状シェルの軸対称座屈解析

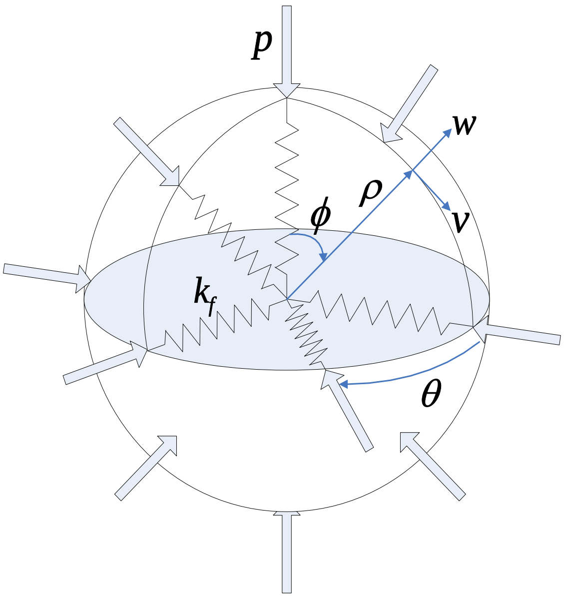
Axisymmetric buckling analysis of spherical shells on an elastic medium

北海道大学工学部　○学生員　関澤貴史　(Takafumi Sekizawa)
北海道大学大学院工学研究科　学生員　飯干晃太朗 (Kohtaroh Iiboshi)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　佐藤太裕　(Motohiro Sato)

１．はじめに

シェルはその優れた構造特性から，工業製品や建築物などの人工物はもちろんのこと，自然界においても非常に多く存在している構造形式である．本研究で取り上げる球状シェル [1]についても同様であるが，座屈挙動に着目すると特に弾性体と接する球状シェルはその座屈モードが非常に特異なものとなることが予想される．身近な例として果物や植物の実はその種類によって様々な形を持っているが，それらの形の多様性は，球の様々なモードの座屈形状である程度表現できるという報告もある [2]．人工物における球状シェルとしては環境負荷の高い液体潤滑剤に代わって利用が期待される固体潤滑剤のカーボンオニオンなどがある．本研究では弾性体で満たされた球状シェルの圧力作用に伴う座屈挙動に関する基礎的な知見を得ることを目的とし，軸対称座屈に関する座屈荷重式を導出するとともに，座屈荷重と弾性体剛性との関係について検討を行う．

２．解析モデル



図―１　解析モデル

図―１は解析対象とする球状シェルのモデル図を示したものである．半径方向に外圧力 p が作用しており，球の中の弾性体は，球の半径方向変位のみに抵抗するバネ定数 k_f のバネ(Winkler foundation)としてモデル化する．シェルについて，鉛直軸からの成分を ϕ，水平軸からの成分を θ，半径方向任意の点までの成分を ρ とした，半径を a，シェルの厚さを h，ポアソン比を ν，ヤング係数を E とする．軸対称変形と仮定して，変位の半径方向の成分を w，接線方向の成分を v とし，伸びなし変形も考慮する．また，径に対して非常に薄いとして薄肉理論を適用し，エネルギー法を用いて解析する．

３．定式化

まず，シェルがつり合い変形を示しているときの静的な変位 w_0 は，外圧と Winkler foundation の抵抗力で変位 w_0 を表すことで以下のように得られる．

$$w_0 = -\frac{(1-\nu)a^2}{2Eh + k_f a^2(1-\nu)} p \tag{1}$$

次に，全ポテンシャルエネルギー V は，球面方向の伸びおよび曲げによるひずみエネルギー，U_s，U_b，Winkler foundation から受ける力によるひずみエネルギー U_w の総和として以下のように与えられる．

$$V = U_s + U_b + U_w \tag{2}$$

それぞれの項は以下のように得られる．ここにおいて ε と χ はそれぞれひずみと曲率を表す．

$$U_s = \frac{C}{2}\int_A (\varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_\varphi\varepsilon_\theta)dA \tag{3}$$

$$U_b = \frac{D}{2}\int_A (\chi_\phi^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu\chi_\phi\chi_\theta)dA \tag{4}$$

$$U_w = \frac{k_f}{2}\int_A w^2 dA \tag{5}$$

ただし

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \tag{6}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{7}$$

$$dA = 2\pi a^2 \sin\phi d\phi \tag{8}$$

以上により求められたポテンシャルエネルギーに変分原理を適用することで座屈現象に対応する支配方程式を得られる．静的な変位を w_0，座屈時の微小な変位を w_i，v_i とする．支配方程式を導出する際，Rayleigh-Ritz trial function を適用し，座屈形状のモード数 n とルジャンドルの多項式 P_n を使って以下のように解を仮定する．[1]

$$w_i = \sum_{n=2}^{\infty} W_n P_n(\mu) \tag{9}$$

$$v_i = \sqrt{1-\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty} V_n P_n'(\mu) \tag{10}$$

ただし

$$\mu = \cos\phi \tag{11}$$

伸びなし変形を考慮しているので δU_s は 0 になると考えられる．これより V_n と W_n について次式が得られる．

$$W_n = -\frac{n(n+1)}{2}V_n \tag{12}$$

これを利用して次式の第二変分で表されたそれぞれのエネルギー項に代入する．

$$\delta^2 V = \delta^2 U_s + \delta^2 U_b + \delta^2 U_w \tag{13}$$

上式において V_n についての偏導関数が 0 になるので，これを支配方程式とする．それを p について解くと p は以下のように表される．

$$p = \frac{2Eh + k_f a^2(1-\nu)}{Eah(n-1)^2(n+2)^2}\left\{\frac{2Eh(n-1)(n+2)}{1+\nu} + \frac{Eh^3(n-1)^2(n+2)^2[n(n+1)-(1-\nu)]}{12a^2(1-\nu^2)} + a^2 k_f n(n+1)\right\} \tag{14}$$

ここで，球状シェルの古典理論による式（弾性体と接しない球状シェルの弾性座屈荷重式）は次式のように与えられる[3]．

$$p_0 = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \tag{15}$$

(14)式を(15)式で割って以下の結果が得られる．

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{3(1-\nu^2)}\left\{\frac{2}{(n-1)(n+2)(1+\nu)}\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{n(n+1)-(1-\nu)}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{n(n+1)}{(n-1)^2(n+2)^2}\left(\frac{ak_f}{E}\right)\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{1-\nu}{(n-1)(n+2)(1+\nu)}\left(\frac{ak_f}{E}\right)\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{n(n+1)-(1-\nu)}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{ak_f}{E}\right) + \frac{n(n+1)(1-\nu)}{2(n-1)^2(n+2)^2}\left(\frac{ak_f}{E}\right)^2\left(\frac{a}{h}\right)^3\right\} \tag{16}$$

4．解析結果

(14)式より座屈荷重はバネ定数の２乗，厚肉比の３乗の関数として表される．図―２は(16)式をプロットしたものである．またバネ定数を変化させたときにとる座屈のモードを示したのが図―３である． a/h =200 ではより厚肉の a/h =100 に比べ座屈波数に変化が見られ，より大きな波数が励起されることが分かる．図―４はバネ定数を変化させたときの座屈荷重の大きさの変化を示したものである．これによると a/h が大きいほど座屈荷重の増加率は大きくなり，P_{cr}/P_0 の値自体も増加することが読み取られる．

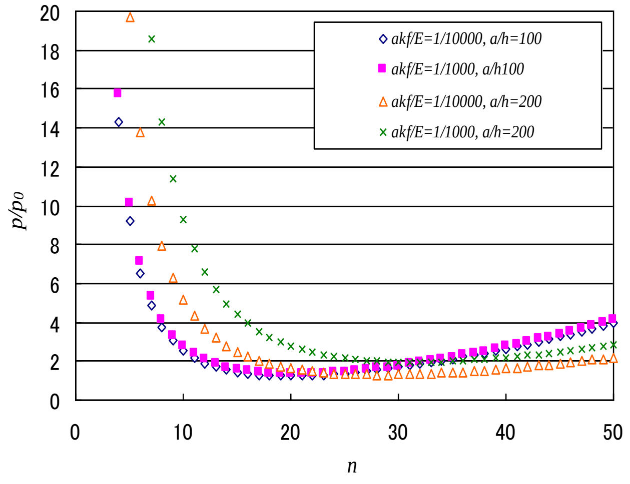
5．考察

本研究の考察として，以下の知見が得られた．

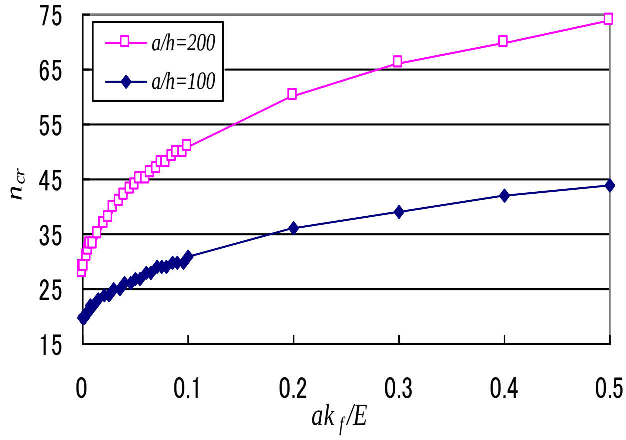
・バネ定数 k_f を増加させると座屈させるために必要な荷重も大きくなり，モードも増える．

・厚肉比について考えると径に対するシェルの厚さが薄い方が大きな座屈荷重を必要とし，また，より大きい座屈波数をとるといえる．

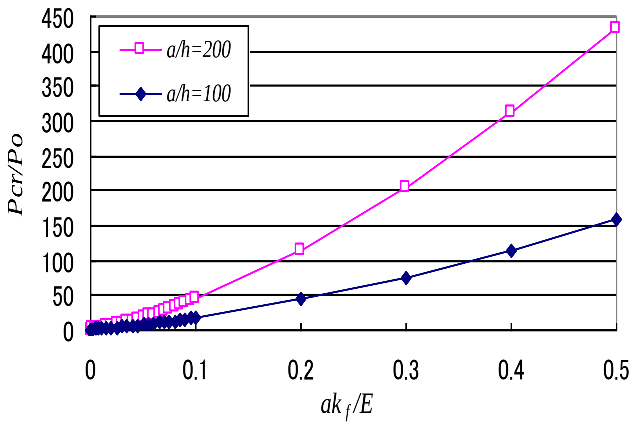
なお現在非軸対称モデルでの定式化も並行して実施しており，今後は予想されるより複雑かつ特異な座屈変形モードの理論的な予測を行う予定である．



図―２　様々なモードにおける荷重比 p/p_0



図―３　バネ定数によって変化する座屈波数 n_{cr}



図―４　バネ定数の変化による座屈荷重比 p_{cr}/p_0

参考文献

1)S-L Fok and D J Allwright: Buckling of a spherical shell embedded in an elastic medium loaded by a far-field hydrostatic pressure, JOURNAL OF STRAIN ANALYSIS VOL 36 NO 6, pp.535-544, 2001

2)Jie Yin et al. : Stress-driven buckling patterns in spheroidal core/shell structures, PNAS vol.105 no. 49, pp.19132-19135, 2008

3)Stephen P. Timoshenko and J.Gere: Theory of Elastic Stability, pp512-519, 1961