

浮遊砂を考慮した河床デューンの発生理論

Formation of dunes with suspended sediment transport

北海道大学工学研究科 ○学生員 中里遥介 (Yosuke Nakasato)
北海道大学工学研究科 正会員 泉 典洋 (Norihiro Izumi)

1 はじめに

Froude 数が比較的小さいとき、河床は不安定となり、河床上は dune と呼ばれる河床波で覆われる。dune は下流側に勾配の急な斜面を有しており、そこで流れの剥離が発生するため、流水に大して大きな抵抗となることが知られている。dune の形成により河道抵抗の増加とそれにより水位の上昇が生じるため、dune の発生理論を明らかにすることは、河川工学的に重要である。

Colombini²⁾ は開水路の乱流モデルとして混合距離仮説を用い、独自の掃流層モデルを導入することによって、dune および antidune の実験結果を良好に説明できる河床波の線形安定解析を提案した。また泉¹⁾ は、Colombini²⁾ の線形安定解析を弱非線形領域に拡張し、ある条件下では dune-平坦床遷移が亜臨界分岐で特徴付けられることを示した。

本研究では彼らのモデルに、浮遊砂輸送を記述する移流拡散方程式と、河床高の時間変化式に浮遊砂による河床変化の項を導入し、線形安定解析を行った。これにより、活発な浮遊砂が生じる河川に適用できる新たなモデルを構築し、活発な浮遊砂が河床波の発生メカニズムにどのような影響を与えるのかを理論的に明らかにする。

2 支配方程式

流れの支配方程式は Reynolds 平均を取った二次元の Navier-Stokes の運動方程式および連続の式である。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + S^{-1} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 U および V はそれぞれ x および y 方向の流速、 S および P はそれぞれ平均河床勾配および圧力、 $T_{ij}(i, j = x, y)$ は Reynolds 応力テンソルである。

混合距離仮説を用いると Reynolds 応力テンソルは次のように表される。

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y}, T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (4, 5, 6)$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, l = \kappa(y - Z) \left(\frac{D + R - y}{D} \right)^{1/2} \quad (7, 8)$$

ここで ν_T は渦動粘性係数、 l および D, Z, R はそれぞれ混合距離および水深、底面高さ、基準面高さ（対数分布則で流速がゼロとなる高さ、図-1 参照）であり、 κ はカルマン定数（= 0.4）である。ただしカルマン定数は浮遊砂が活発

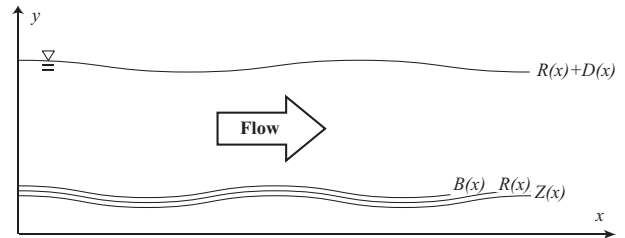


図-1 流れと座標系の概念図

に発生する条件下において、ある程度減少することが知られているため、カルマン定数をどのように見積もるべきかは今後の課題である。

掃流砂量式として、河床の局所勾配の影響を取り入れた次の Meyer-Peter & Müller 式を用いる。

$$\Phi = \frac{\bar{q}_B}{\sqrt{R_s g \bar{d}_s \tilde{d}_s}} = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \quad (9)$$

ここで Φ および $\bar{q}_B$ はそれぞれ無次元および有次元の掃流砂量、 R_s は水中比重（= 1.65）、 $\bar{d}_s$ は有次元の河床材料の粒径であり、掃流層上面（ $\eta = \eta_b$ ）における無次元掃流力 θ_b および無次元限界掃流力 θ_c は次式で表される。

$$\theta_b = \frac{S}{R_s \bar{d}_s} \tau_b, \theta_c = \theta_{ch} - \mu \left(S - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (10, 11)$$

ここで B および τ_b は掃流層上面の高さおよび無次元剪断力、 θ_{ch} および μ は平坦床における限界無次元掃流力（= 0.047）および河床勾配の効果を表すパラメータ（= 0.1）である。

浮遊砂の移流拡散方程式は次のように表される。

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + (V - v_s) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (12)$$

ここで C は浮遊砂濃度であり、 v_s は浮遊砂粒子の沈降速度であり、本研究では Dietrich(1982) による式を用いた。

3 河床高さの時間変化

河床形状の時間変化は、浮遊砂を考慮した Exner 方程式で次のように表される。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}_B}{\partial x} + \tilde{E}_s - \tilde{D}_p = 0 \quad (13)$$

ここで λ_p は空隙率、 $\tilde{E}_s$ および $\tilde{D}_p$ はそれぞれ浮遊砂の巻上速度および沈降速度であり、次のように表される。

$$\tilde{E}_s = \tilde{v}_s E_s, \tilde{D}_p = \tilde{v}_s C [\xi, \eta_b] \quad (14, 15)$$

$$E_s = 1.0 \times 10^{-5} \left(\frac{U_f}{v_s} \right)^4 \quad (16)$$

上式を代入し、式 (13) を無次元化すると、Exner 方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{v_s}{d_s} \sqrt{\frac{S}{R_s d_s}} (E_s - C[\xi, \eta_b]) \quad (17)$$

また上式ではすでに次のような変数変換が行われている。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - R(x)}{D(x)} \quad (18, 19)$$

4 線形安定解析

安定解析の基本状態は平坦床等流状態である。基本状態では各パラメータは次のように表すことができる。

$$(U, V, D, Z, R, C) = (U_0(\eta), 0, 1, 0, R_0, C_0(\eta)) \quad (20)$$

添字 0 で表されているのは基本状態における解である。このとき流れの方程式より次の対数分布則が得られる。

$$U_0(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (21)$$

上式を $\eta = 0$ から $\eta = 1$ まで積分すると抵抗係数 C_r が次のように得られる。

$$C_r^{-1} = \frac{\tilde{U}_{a0}}{\tilde{U}_{f0}} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right] \quad (22)$$

ここで $\tilde{U}_{a0}$ は基本状態における水深平均流速である。

基本状態における河床 Z に対し摂動を与え、それに合わせて各パラメータを次のように摂動展開する。

$$(\psi, P, D, Z, R, B, C) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0, C_0) + A(\psi_1, P_1, D_1, R_1, B_1, C_1) [\exp[i(\alpha\xi - \Omega t)]] \quad (23)$$

ここで ψ は流れ関数、 A および α 、 Ω はそれぞれ摂動の振幅および波数、複素角周波数である。上式を流れおよび浮遊砂の支配方程式に代入し、Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法を用い、適当な境界条件の下で解くと ψ_1, C_1 が求まる。またそれらを Exner 方程式 (17) に代入すると、最終的に Ω は次のような関数形で求まる。

$$\Omega = f(\alpha, Fr, C_r, R_p) \quad (24)$$

ここで R_p は粒子 Reynolds 数であり、ここで求められた Ω の虚部 Ω_i が、摂動の増幅率に相当する。

5 結果および考察

図-2 に、 α - Fr 平面上に描いた増幅率 Ω_i の中立曲線 ($\Omega_i = 0$) を示す。Froude 数が小さい領域に摂動の増幅率が正となる領域、すなわち河床に dune が発生する領域が現れている。また同時に Guy ら³⁾ が行った実験データもプロットした。ここで、 $\times$ および $\circ$ はそれぞれ $C_r^{-1} = 20$ および 22 での dune を示している。

C_r^{-1} の増加および R_p の減少は、粒径の減少を意味する。すなわち Guy らによる実験結果では、浮遊砂が活発になるにしたがい dune が発生する Froude 数の値は減少していることがわかる。また本研究の解析でも、 C_r^{-1} の増加および R_p の減少により、dune の発生領域は小さくなり臨界 Froude 数は減少していることがわかる。以上のことから、浮遊砂項の導入は実験結果を良好に表していると言える。

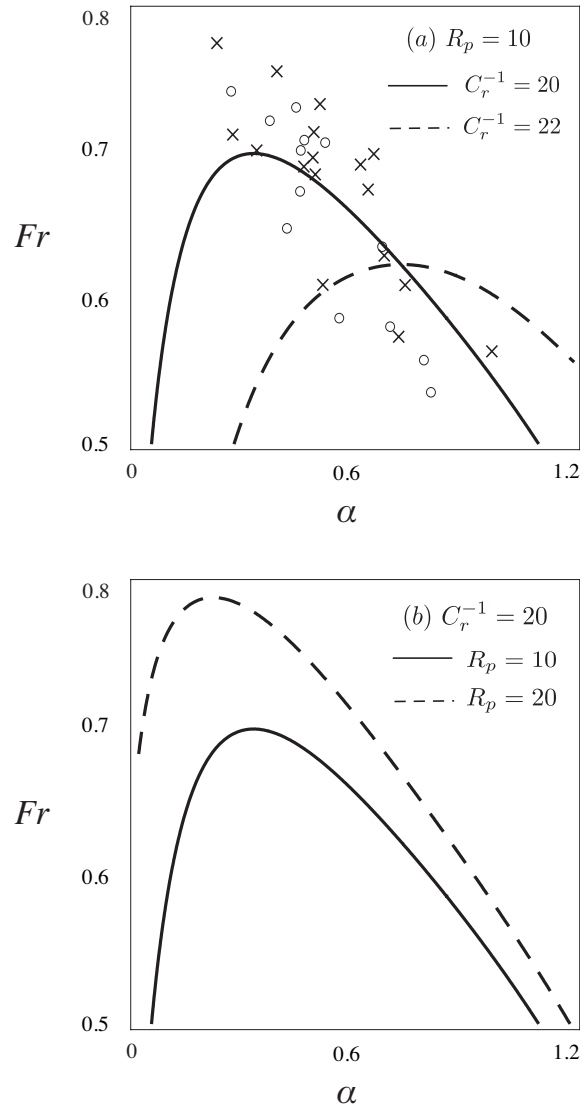


図-2 式 (24) より得られる増幅率 Ω_i の中率曲線図

6 結論

活発な浮遊砂が河床波の形成条件にどのような影響を与えるかを理論的に解明するため、浮遊砂の影響を考慮した線形安定解析を行った。解析の結果、河床材料の粒径が減少し、浮遊砂が活発に生じるようになると、dune の形成を抑制することが明らかとなった。またこれらの結果により、 $C_r^{-1} = 20 \sim 22$ 付近では従来のモデルと比べ、より良好に実験結果を説明できる。

参考文献

- 1) 泉 典洋：混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析, 土木学会論文集, 第 51 巻, 2007.
- 2) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 502, 2004.
- 3) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S. Government Printing Office, Washington, 1966.