

DEM-URANS カップリングによる Dune 発生過程のシミュレーション

DEM-URANS coupling approach for simulating dune development

| | | | | |
|----------|------------------|------|------|--------------------|
| 北海道大学工学部 | 環境社会工学科国土政策学コース | ○学生員 | 笠原孟 | (Hajime Kasahara) |
| 北海道大学教授 | 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 | 正会員 | 清水康行 | (Yasuyuki Shimizu) |
| 北海道大学准教授 | 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 | 正会員 | 木村一郎 | (Ichiro Kimura) |
| 北海道大学助教 | 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 | 正会員 | 山口里実 | (Satomi Yamaguchi) |

1. 序論

砂河床移動水路においては河床材料特性と水理条件によって時々刻々と河床形態が姿を変える。河床波は水理的抵抗として作用し、水位の上昇やそれに伴う河川の氾濫を引き起こす要因と成りえる。抵抗変化機構の解明と予測手法の確立は、上記の防災の目的にとどまらず、流送土砂量の推定精度の向上という観点からも重要であり、これまでに数多くの研究が行われてきた。これらの河床形態に関する研究は流砂をフラックスとして捉える Euler 的視点に基づくものと、粒子個々の運動に着目する Lagrange 的視点に基づくそれに大別される。Nakagawa and Tujimoto¹⁾は Einstein 型確率モデルを基に非平衡流砂量式を提案している。この式は解析的モデルゆえに簡潔な記述が導入されており、粒子間の相互作用や砂粒子の輸送距離に対する河床形状の影響は考慮されていない。Euler 的な再現モデルとしては Giri・Shimizu ら²⁾が Kimura ら³⁾の非線形 $k-\varepsilon$ モデルと Nakagawa and Tujimoto による流砂式を用いた数値計算によって Dune の形成から平坦床への遷移、及び再形成といった非定常の現象再現に成功している。Lagrange 的な再現に関しても、後藤⁴⁾らは個別要素法を用いて微小河床凹凸発生機構の再現に成功している。その際、河床凹凸が微小であることから乱れの生じない一様流を仮定して計算を実行しているが、実河川の河床では砂粒子が移動することによって流れに変化が生じ、それが粒子に影響を及ぼすというフィードバックが発生している。本研究の目的は以上の現象を踏まえ、流れを二次元鉛直 URANS モデル、粒子の挙動を個別要素法によって計算し、Dune の発生・発達過程の再現を試みることである。また、形成された Dune 形状や水位・流速分布を既知の知見と比較することによって DEM-URANS カップリングによる Dune 形成数値模擬の精度検討も同時に行う。

2. 計算手法

2.1 固液混相流モデルの概要

固液二相流モデルには Euler 型・Lagrange 型が存在する。液相とのアナロジーを前提とする方法を Euler-Euler カップリング、固相粒子の追跡を行う方法を Euler-Lagrange カップリングと呼ぶ。本研究の目的は個別要素法を用いて Dune と流れの関係を再現することであるが故に、本研究では Euler-Lagrange 型のモデルを採用する。

2.2 乱流場の解析モデルの概要

掃流砂の挙動を再現するには乱流場を精度よく再現する手法を欠かすことが出来ない。このため、本研究では Giri・Shimizu ら²⁾と同様のフレームワークで計算を行い、時々刻々と変化する河床上の流れを計算した。基礎となるのは Kimura and Hosoda¹⁾の非線形 $k-\varepsilon$ 鉛直二次元乱流解析モデルである。前述のように Giri・Shimizu ら²⁾はこのモデルを用いて、デューンのクレスト部背後に生じる剥離現象などを再現すると共に、Nakagawa and Tujimoto¹⁾による非平衡流砂モデルを用いたシミュレーションにより Dune の発生・発達過程や、流量変化にともなう遷移河床への移行過程などを良好に再現してみた。流体の基礎方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v'v'}) - g \end{aligned} \quad (2)$$

ここに x : 主流方向座標, y : 鉛直方向座標, u : 主流方向座標, v : 鉛直方向座標, p : 圧力, $-\overline{u'u'}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'v'}$: レイノルズ応力の各成分である。これらの式を Σ 座標に変換して用いる。圧力項に関しては静水圧と動水圧に分離して次のように表す。

$$p = p_0 + p' = g \int_y^H \rho dz + p' = pg(H - y + p') \quad (3)$$

p' : 動水分圧, H : 水位であり、動水位については SOR 法による収束計算によりステップ毎に求める。水位の変化については、次の運動学的条件を用いて計算する。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} = v, \quad H = y_b + h \quad (4)$$

y_b : 河床高, h : 水深である。レイノルズ応力は非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いて次のように評価する。

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \sum_{\beta=1}^3 C_{\beta} \left(S_{\beta ij} - \frac{1}{3} S_{\beta \alpha \alpha} \delta_{ij} \right) \quad (5)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_r} + \frac{\partial U_r}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_r} \right), \quad S_{3ij} = \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \frac{\partial U_r}{\partial x_j}$$

ここに、 ν_t : 渦動粘性係数, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ, k : 乱れエネルギー, ε : 乱れエネルギーの拡散率,

C_β : モデル係数である. 渦動粘性係数は次式で与える.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \min\left(0.09, \frac{0.3}{1+0.09\Phi^2}\right) \quad (6)$$

$$\Phi = \max[S, \Omega], \quad S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

k および ε については次の輸送方程式より求める.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_h - \varepsilon \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (8)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_h - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

モデル定数として, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$ を用いた. 生成項 P_h は次式で与える.

$$P_h = -u_i' u_j' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

壁面の境界条件は壁関数で与え, 底面摩擦については粗面の対数則で評価する. このときの粗度高さ k_s は粒径の 2.5 倍とする. 水面付近の乱れエネルギー減衰を表す為の次の関数を渦動粘性係数に乗ずる.

$$f_s = 1 - \exp\left(-B \frac{(h-y)\varepsilon_s}{k_s^2}\right), \quad B=10 \quad (10)$$

なお, 移流項は CIP 法を用いて計算を実行する.

2.3 粒子の運動方程式

砂粒子番号 i の併進の運動方程式は

$$\begin{aligned} \sigma A_3 d_{pi}^3 \frac{du_{pi}}{dt} &= \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d_{pi}^3 |u - u_{pi}| (u - u_{pi}) \\ &+ \rho A_3 d_{pi}^3 \frac{du}{dt} + C_M \rho A_3 d_{pi}^3 \left(\frac{du}{dt} - \frac{du_{pi}}{dt} \right) + 6\rho A_2 d_{pi}^2 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\tau} - \frac{du_{pi}}{d\tau} \right) d\tau \\ &+ A_3 d_{pi}^3 (\sigma - \rho)g + F_{LM} + F_{LS} + F_{pINTi} \end{aligned} \quad (11)$$

であり, また回転運動の方程式は

$$I \frac{d\omega_{pi}}{dt} = T_{pINTi} \quad (12)$$

と表記できる. ρ : 流体密度, σ : 粒子密度, C_M : 付加質量係数, C_D : 抗力係数, A_2 : 砂粒子の 2 次元形状係数 (= $4/\pi$), A_3 : 砂粒子の 3 次元形状係数 (= $6/\pi$), d : 粒径, u : 周囲流体流速, u_{pi} : 砂粒子速度, ν : 動粘性係数, τ : 底面せん断力, g : 重力加速度である. 運動方程式の左辺第一項は砂粒子に作用する慣性力, 右辺第一項は砂粒子に作用する流体抗力, 右辺第二項は周囲流体の加速に伴う力, 右辺第三項は付加質量の加速に必要な力, 右辺第四項 (Basset 項) は砂粒子と周囲流体の非定常な相対運動履歴に関する力, 右辺第五項は重力と浮力で, 右辺第六・七項 (Magnus 力, Saffman 力) は粒子に作用する揚力である.

これらの運動方程式において Basset 項, Magnus 力, Saffman 力は他の項と比較してオーダーが小さく, 近似的には無視できると報告されている. 現時点ではこれらの項を考慮していないが, 研究の進展によってはこれらの項の導入も検討する.

2.4 個別要素法の概要

粒子濃度が増加し, 個々の粒子が多数の接点で近傍の粒子と接触する状態に至ると古典的剛体球モデルは全く機能せず, 粒子間の重なりを許容するモデルが必要となる. 個別要素法は粒子の重なりに応じて粒子間反発力を与える事によって, 粒子間の作用力を決定するモデルである. 個々の粒子間作用力は粒子間の接点に弾性スプリング, 粘性ダッシュポッド, スライダーという機械的要素を導入してモデル化され, これらの機械的要素は接平面内とその法線方向に配置される. 粒子 i, j の接触判定は以下の式を用いて行われる.

$$L_{ij} = \frac{d_i + d_j}{2} \quad (13)$$

ここに, L_{ij} : 粒子 i, j の中心間距離であり,

$$L_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (14)$$

と書ける. 接触が確認された粒子 i の時間 Δt 間における変位および角変位である $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta \Phi_i$ を接線方向に設定したローカル座標系 (ξ, η) に変換することにより, 粒子間の法線・接線方向の相対変位を求める.

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi_{ij} \\ \Delta \eta_{ij} \end{bmatrix} = [T_{GL}] \begin{bmatrix} \Delta x_i - \Delta x_j \\ \Delta y_i - \Delta y_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta \Phi_i & \Delta \Phi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i/2 \\ d_j/2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここに, T_{GL} : グローバル座標・ローカル座標間の座標変換行列

$$[T_{GL}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\sin \alpha_{ij} = -\frac{y_i - y_j}{L_{ij}} \quad ; \quad \cos \alpha_{ij} = -\frac{x_i - x_j}{L_{ij}}$$

であり, 作用力 F_ξ, F_η を以下のように表現する.

$$\begin{aligned} F_\xi(t) &= e_n(t) + d_n(t) & F_\eta(t) &= e_s(t) + d_s(t) \\ e_n(t) &= e_n(t - \Delta t) + k_n \Delta \xi_{ij} & e_s(t) &= e_s(t - \Delta t) + k_s \Delta \eta_{ij} \\ d_n(t) &= c_n \frac{\Delta \xi_{ij}}{\Delta t} & d_s(t) &= c_s \frac{\Delta \eta_{ij}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (17)$$

ここに, k_n, k_s : 法線・接線方向バネ係数, c_n, c_s : 法線・接線方向粘性定数, μ : 静止摩擦係数である. これらの係数の決定方法は後藤ら⁵⁾の研究を参考にされたい. 法線方向に配置された引張りに抵抗しないジョイントは圧縮を正として,

$$F_\xi(t) = F_\eta(t) = 0 \quad (e_n < 0) \quad (18)$$

と表現され, 接線方向に活動するジョイントは,

$$F_\eta(t) = \mu \cdot \text{sign}[e_n(t), e_s(t)] \quad (|e_s| > \mu e_n) \quad (19)$$

と表される, ここに $\text{Sign}(a,b)$ は a の絶対値に b の符号を乗じたものと定義する. このローカル座標で導かれた粒子間作用力を以下の式でグローバル座標に変換する.

$$\begin{bmatrix} F_{pINTxi} \\ F_{pINTyi} \end{bmatrix} = -\sum_j [T_{GL}]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{bmatrix}_{ij}, \quad T_{pINTi} = -\frac{d_i}{2} \sum_j [F_\eta]_{ij} \quad (20)$$

上記の方程式により粒子 j が粒子 i に加える力を導き, 粒子 i に加えられるこれらの力を合算することにより粒子の運動を記述する.

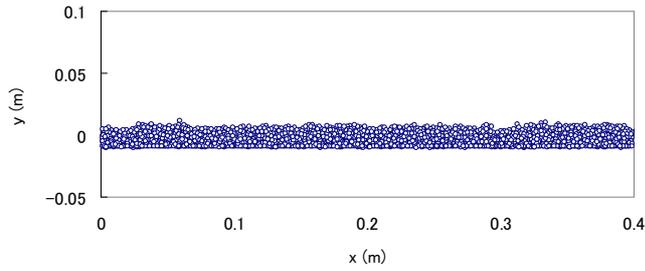


図-1 packing後の河床

2.5 河床の概要

数値模擬を正確に実行するには実河床を精度よく再現することが欠かせない. 関根ら⁶⁾の実験によると, 河床面上に露出している河床粒子中心位置は平均河床まわりに分散 $d/3$ の正規分布に従って存在することが確認されている. 河床形成には様々な手法が存在するが, 本研究では個別要素法のコードを直接採用することができる重力法の適用が妥当と判断した. 重力法とは計算領域に粒子をランダムに発生させ, 粒子に重力を作用させることにより自然に河床を形成させる手法である. 今ら⁷⁾は DEM を用いた重力法により分散 $d/3$ の正規分布を持つ河床を形成することが可能であると報告している. 図-1 は packing 後の河床の様子を表したものであるが, 微小な起伏の存在を確認できる.

2.6 計算領域

鉛直方向 0.21m, 主流方向 0.4m の計算領域を設け, x 方向 40, y 方向 88 のグリッドで区切り計算を実行している. 初期河床勾配は 1/1000 であり, 粒径 0.002m(2mm)の粒子 2000 個を DEM の計算対象とする. Dune の発生条件としてはフルード数に纏わる条件 $Fr < 0.8$ と砂粒レイノルズ数 $Re_* > 20$ が良く知られているが, 初期条件では上記要件を満たすべく $\tau_* = 0.15$ なる水理条件を設定した. τ_* は以下に示す無次元掃流力 (u_* : 摩擦速度, τ_0 : 底面せん断力) である.

$$\tau_* \equiv \frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)gd}, \quad u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (21)$$

2.7 Euler-Lagrange coupling

Lagrange 的粒子計算と Euler 的水理計算のカップリングは各グリッドにおける間隙率によって河床を定義することにより実行される. 即ち, 2.6 で述べたグリッドで仕切られた区域を占める粒子の割合が 70% を越えると, そのグリッドを河床と認識し, その河床分布を液相の計算に反映させる. ところで, 実際の砂河床では底面流速が 0 となる河床の上部に砂粒子が小跳躍を繰り返す saltation 層が存在するが, 上述の手法では saltation 層を定量的に表現することが出来ない. そこで, 以下に示す芦田・道上の式を用いて掃流砂量と無次元掃流力の関係付けを試みる.

$$q_{B*} \equiv \frac{q_B}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}} = 17\tau_*^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right) \quad (22)$$

ここに, q_B : 掃流砂量, q_{B*} : 無次元掃流砂量, τ_{*c} : 無次元限界掃流力である. 粒子の間隙率により河床を定義した後に, 掃流砂量と無次元掃流力の関係が適切となるように河床高さを調節することで数値模擬と実河川のマクロな整合性を確保した.

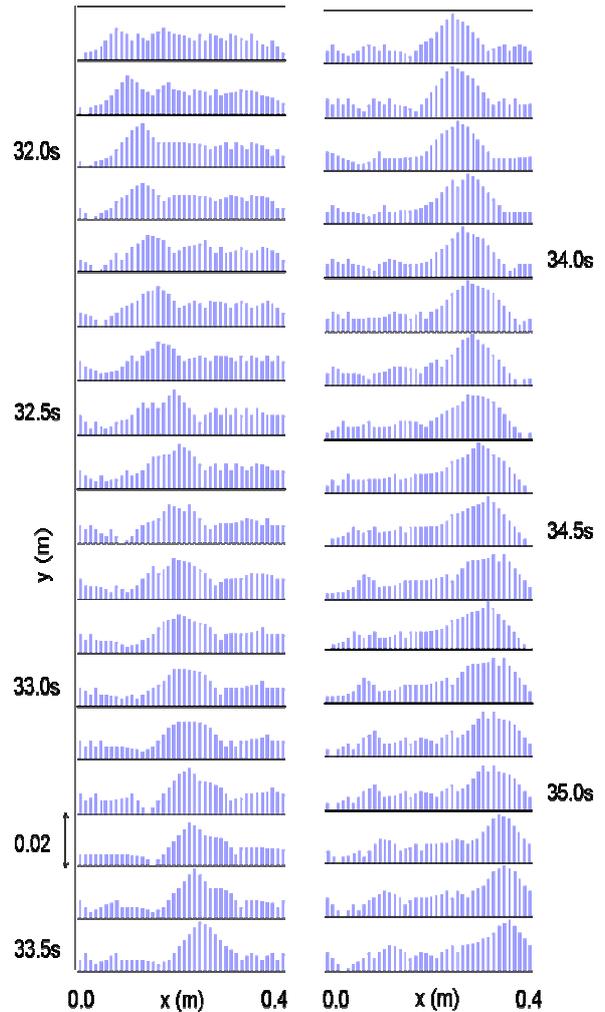


図-2 Dune の発生過程

3. 結果と考察

3.1 Dune の発生過程

Dune 発生過程を時系列に表示したものを図-2 に示す. 左上から右下に向かって 0.1sec おきの河床高さを表す. 高さを表す縦軸は一桁 0.02m であり, 横軸は流下方向を表す. 図-1 で示したように河床は初期条件において $d/3$ 程度の分散を持っている. 0sec から 31sec に至る河床では, 後藤ら⁴⁾が粒子配列の偏りをもって説明した微小な起伏が存在するのみで周期的な波形は認められない. 32sec に幾分スケールの大きい河床波が偶発的に形成されると, この凸部が時間経過と共に自己増幅し, 33.5sec 以降には 0.02m 程度の波高を持つに至る. この河床波はこれ以上成長することなく, 主流方向に移動することとなる. 本研究の平均水深は約 0.1m であるので, 再現された河床波の波高は水深の約 1/5 となる. 一般的に Dune の鉛直スケール波高は平均水深の 1/3~1/4 とされているので, 今回再現された Dune スケールは実物より幾分小さい. 波長に関しては, 水深の約 5 倍程度の値をとるとされているが, 本研究の再現結果では 0.4m の波長を示している. これは平均水深の 4 倍程度なので, 波高と同様に若干規模が小さいことが伺える.

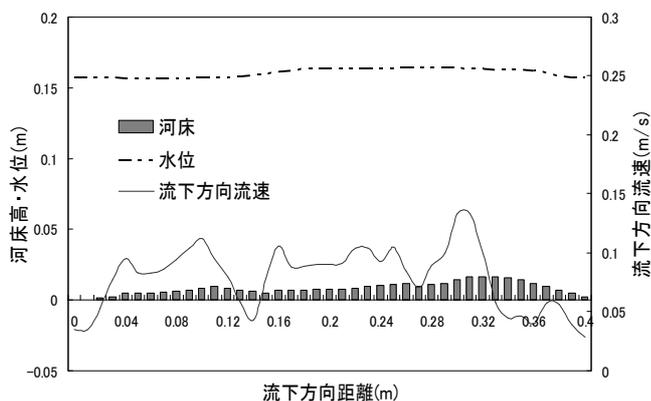


図-3 Dune 上の水位・流速・河床高分布

3. 2 Dune 上の河床流速・水位分布

Dune 周囲の水位と流速について図-3のような結果を得た。計算領域における最小河床高さを 0 としてグラフを作成している。流下方向流速とは河床における x 方向流速成分であり、本研究で用いた計算コードを固定平坦床に適用すると河床の流下方向流速は 0.07(m/s)程度の値をとる。一般的に Dune の上流勾配部では流速が増大し、頂上から下流勾配部では流速の値が減衰、または負になることが知られている。数値模擬の結果を見ると、河床が順勾配の際には流速が平坦河床の 2 倍程度に増幅し、逆勾配へ変化すると共に平坦河床流速の 1/2 程度へと減衰していることが認められる。ゆえに、DEM-URANS カップリングは良好な再現結果を示しているといえるだろう。数値模擬では実現象において存在するであろう負の流速が存在しないが、これは Dune の波高が実現象よりも小さく流れに十分な剥離が発生していない為と考えられる。Dune 上の水面形状に関して、河床波と水面が逆位相を示すことが知られている。本研究の数値模擬の結果では $x=0.35$ (河床波頂上付近) から周期境界条件を跨いで $x=0.12$ 地点まで上述の理論が成り立つことが確認される。 $x=0.12\sim 0.32$ 地点では水位の低下が確認されないが、これは計算領域に大きな Dune 頂上 ($x=0.35$)と小さな Dune 頂上($x=0.11$)が混在し、両 Dune 中間区域において河床勾配の正負が明確に区別されない為と考えられる。

3. 3 DEM-URANS における Dune 発生機構の考察

上記の結果を踏まえて、DEM-URANS カップリングにおける Dune 発生機構について考察を加える。程度の差こそあれ、河床には粒子の配列偏差に起因する起伏が常に存在する。この起伏が偶発的に規模の大きなものとなると凸部背後に流速の減衰が生ずる。粒子速度と比較して流体速度が相対的に遅い場合には粒子に進行方向と逆向きの抗力が働き、Dune 下流勾配部に存在する粒子の進行を妨げる。この抵抗により凸部移動が抑制され、そこに掃流砂が打ち付けられることにより微小凹凸が自己増幅すると考えられる。Dune の成長と共に上流勾配部で流体の加速が誘発されるが、この加速により河床波頂上部の粒子が甚だしい流速に曝され、進行方向に大きな抗力が発生する。この抗力により河床波の成長は抑制され、Dune の形状が安定すると考えられる。

3. 4 本研究を踏まえての改善点

一般に Dune の頂上背部には安息角程度の勾配が現れるとされているが、図-3の Dune 頂上背部勾配は安息角と比較してやや緩やかな傾斜を示している。これは DEM の砂粒子を球体とみなす仮定に対して、実際の砂粒子は不規則な表面形状をもち、球体よりも噛み合わせが卓越していることが原因と考えられる。加えて、湿潤砂粒子は粘性を帯びることにより、単純な球の衝突とは異なる挙動を示す。ゆえに、今後は仮想粒子間の作用力を粗面湿潤砂粒子の挙動に見合うように改善し、Dune 頂上背後の傾斜角増大を図る。

4. おわりに

本研究では、DEM-URANS カップリングアプローチを用いて Dune 発生過程の再現と水理的状况について検討を行った。これまでも Euler 的な Dune の発生や Lagrange 的な河床微小凹凸発生機構を再現した研究は行われているが、本研究では DEM と URANS を組み合わせることで Dune の発生の再現を行うという独自の試みを行っている。

Lagrange 的な Dune の再現を試みることによってクレスト部背後の粒子の挙動や遷移状態における粒子輸送、混合粒系 Dune 発生過程における sorting など、Euler 的な手法では表現することの出来ない現象を対象とした数値模擬を行うことが出来る可能性がある。Dune の再現性を十分に高めた後に、上述した現象に取り組む予定である。

参考文献

- 1) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, Proc. ASCE 106, 2029-2051, HY12, 1980
- 2) Giri, S. and Simizu, Y.: Numerical computation of sand dune migration with free surface flow, Water Resources Research, Vol.42, w10422,doi:10.1029/2005 WR004588, 2006
- 3) Kimura, I. and Hosoda, T.: A non-linear k- ϵ model with reliability for prediction of flows around bluff bodies, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 42:813-837 (DOI:10.1002/flid.540).
- 4) 後藤仁志・原田英治・酒井哲郎 移動床における砂粒子間干渉による砂面攪乱の発生 水工学論文集 第45巻 2001
- 5) 後藤仁志・原田英治・酒井哲郎 個別要素法に基づく移動床シミュレーションのモデル定数の最適化 土木学会論文集 No.691/II-57 2001
- 6) 関根正人・吉川秀夫 掃流砂の停止機構に関する研究 土木学会論文集 第399号/II-10 1988
- 7) 今翔平・清水康行・木村一郎・山口里美 DEM-RANS カップリングによる河床波上掃流砂ステップ長に関する研究 応用力学論文集 Vol.12 2000