平成21年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第66号

変分原理による DGFEM の定式化とその基礎的特性に関する検討

Fundamental study on Discontinuous Galerkin FEM based on variational principle

北海道大学大学院工学研究科　○学生員　齋藤主樹 (Kazuki Saito)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　蟹江俊仁 (Shunji Kanie)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　佐藤太裕 (Motohiro Sato)
大成建設（株）　正　員　鈴木俊一 (Shunichi Suzuki)

１．研究目的とその背景

不連続ガラーキン有限要素法(DGFEM)とは，一般的な有限要素法(FEM)に比べ，各要素間の不連続性を許容する事により，要素境界において目的変数とその微分値に不連続な解析値を与える手法であることから，物理量を要素毎に保存することができる手法である．よって有限要素法と有限体積法の双方の長所を有する解析手法であるとされている．このような特徴から，DGFEM は複雑な幾何形状に対する柔軟性と，物性値の不連続性が卓越する条件下での高い解析精度を有する手法であると考えられており，近年，主に流体力学分野等で精力的に研究がなされてきた．

そこで，鈴木ら[1),2)]は放射性廃棄物処分施設を対象とした核種移行解析の多次元化を目的とし，二次元非定常移流拡散方程式に対しての適用を行い，透水係数や実効拡散係数等の物性値の不連続性が卓越するような条件下においても，精度の高い解を得られること，三次元へ拡張した場合においても妥当な解が得られることを実証した．しかし，当手法についての基礎的な原理や特性に関しては，研究事例が少なく，明らかにされていない部分が多いのが現状である．

今後，当手法を応用していくために，本研究では，支配方程式中に含まれる拡散項に着目し，変分原理に基づく基礎的な定式化を行い，ラグランジュ乗数の設定，不連続値の評価・制御について述べる．また当手法の適用事例として，一次元における張力と荷重を与えられた弾性床上の弦のたわみ問題を扱い，解析値の特徴，一般的な有限要素法との比較・検討を行うこととする．

２．**DGFEM** による有限要素式の導出

a) 変分原理による支配方程式・有限要素式の導出

張力 T,荷重 w が与えられた,弾性係数 k の床上の弦(参照：**図−1**)のたわみϕに関するエネルギー汎関数は以下の式(1)で記述される．

$$\Pi(\phi)=\int_\Omega\left[\frac{T}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{k}{2}\phi^2-w\phi\right]d\Omega \tag{1}$$

式(1)の変分を考えると，以下のようになる．

$$\delta\Pi(\phi)=\int_\Omega\left[-T\nabla^2\phi+k\phi-w\right]\delta\phi d\Omega \tag{2}$$

式(1)の汎関数が停留になるとき，すなわち，汎関数の変分(2)が 0 となるとき，オイラー方程式として，以下の弦のたわみに関する支配方程式が得られる．

$$-T\nabla^2\phi+k\phi-w=0 \tag{3}$$

また，式(2)から弦のたわみに関する支配方程式の一般的な FEM による有限要素式を導出することができる．

b) 要素境界へのラグランジュ乗数の導入

ここで，対象領域が 2 要素からなる変分問題を考え，要素間に$\phi_1=\phi_2$という付帯条件を設けた場合，汎関数はラグランジュ乗数λの導入により，以下の式(4)のように記述することができ，要素間での不連続性を考慮することができる．

$$\Pi[\phi]=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left[\frac{T}{2}(\nabla\phi_i)^2+\frac{k}{2}\phi_i^2-w\phi\right]d\Omega+\int_{\Gamma_{\rm int}}\lambda(\phi_1-\phi_2)d\Gamma \tag{4}$$

$\Gamma_{\rm int}$ は 2 要素間の接触境界である．$\Gamma_{\rm int}$ に関する境界積分項を考慮しない場合,物理量は 2 領域全体で保存され,変分原理から一般的な FEM による有限要素式を導出することができる．

$\Gamma_{\rm int}$ に関する境界積分項を考慮し，その変分を 0 とする場合，物理量は要素毎に保存され，$\Gamma_{\rm int}$ に関する積分項が$\Gamma_{\rm int}$ での境界値の制約条件となる．そこで，式(4)の変分を 0 とすることで，以下の式(5)～式(7)が得られる．

$$-T\nabla^2\phi_i+k\phi_i-w=0\ \ in\ \Omega_i\ \ (i=1,2) \tag{5}$$

$$\begin{gathered}(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)+\lambda=0,\ (\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2)-\lambda=0\quad on\ \ \Gamma_{\rm int}\\ \left[\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1+\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2=0\right]\end{gathered} \tag{6}$$

$$\phi_1-\phi_2=0\ on\ \Gamma_{\rm int} \tag{7}$$

式(6)，式(7)はそれぞれ$\Gamma_{\rm int}$ でのフラックスのつりあいと連続性に関する制約条件である．式(5)において，ラグランジュ乗数を 2 領域間の変数$\nabla\phi_1,\nabla\phi_2$ とパラメータθ_1,θ_2 を用いて次のように表現することを考える．

$$\lambda=\theta_1(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)+\theta_2(\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2) \tag{8}$$

式(8)を式(6)に代入することで，以下の式が得られる．

$$(1+\theta_1)(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)+\theta_2(\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2)=0\quad on\ \ \Gamma_{\rm int} \tag{9}$$

$$-\theta_1(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)+(1-\theta_2)(\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2)=0\quad on\ \ \Gamma_{\rm int} \tag{10}$$

式(9),式(10)からθ_1,θ_2 に関して,以下の関係式が得られる．

$$\theta_1=\theta_2-1 \tag{11}$$

式(11)の関係を用いることにより，任意のパラメータθを用いてラグランジュ乗数を式(12)のように定義できる．

$$\lambda=(\theta-1)(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)+\theta(\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2) \tag{12}$$

(i)　$\theta=0$ の場合　$\lambda=-(\nabla\phi_1\cdot\mathbf{n}_1)$

$$\begin{aligned}\delta\Pi[\phi]=&\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left\{\nabla\phi_i\cdot(\nabla\delta\phi_i)-k\phi_i\delta\phi_i-w\delta\phi_i\right\}d\Omega\\ &-\int_{\Gamma_{\rm int}}(\nabla\delta\phi_1)\cdot(\phi_1\mathbf{n}_1+\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma\\ &-\int_{\Gamma_{\rm int}}(\nabla\phi_1)\cdot(\delta\phi_1\mathbf{n}_1+\delta\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma=0\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)は要素間の連続性に関して， x 軸に沿って移流するような問題でいえば，風上側に重みを与える定式化となっている．

(ii) $\theta=1$ の場合　$\lambda=+(\nabla\phi_2\cdot\mathbf{n}_2)$

$$\begin{aligned}\delta\Pi[\phi]=&\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\{\nabla\phi_i\cdot(\nabla\delta\phi_i)-k\phi_i\delta\phi_i-w\delta\phi_i\}d\Omega\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}}(\nabla\delta\phi_2)\cdot(\phi_1\mathbf{n}_1+\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}}(\nabla\phi_2)\cdot(\delta\phi_1\mathbf{n}_1+\delta\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma=0\end{aligned}\tag{14}$$

式(14)は要素間の連続性に関して， x 軸に沿って移流するような問題でいえば，風下側に重みを与える定式化となっている．

(iii) $\theta=0.5$ の場合　$\lambda=\frac{1}{2}(-\nabla\phi_1\mathbf{n}_1+\nabla\phi_2\mathbf{n}_2)$

$$\begin{aligned}\delta\Pi[\phi]=&\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\{\nabla\phi_i\cdot(\nabla\delta\phi_i)-k\phi_i\delta\phi_i-w\delta\phi_i\}d\Omega\\&-0.5\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}}(\nabla\delta\phi_1+\nabla\delta\phi_2)\cdot(\phi_1\mathbf{n}_1+\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma\\&-0.5\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}}(\nabla\phi_1+\nabla\phi_2)\cdot(\delta\phi_1\mathbf{n}_1+\delta\phi_2\mathbf{n}_2)d\Gamma=0\end{aligned}\tag{15}$$

式(15)は要素間の境界に対して，風上・風下の要素に同等の重みを与える定式化となっている．

以上の定式化により，要素境界で不連続性を考慮することが可能となり，要素境界に 2 つの不連続な解析値を得ることができる．また，パラメータ θ に任意の値を与えてラグランジュ乗数を定義する事により，風上，風下に重み付けをして解析を行うことも可能となる．

ここで，一次元で，対象領域が N 要素からなる場合について考える．境界条件として，対象領域の両端部でディリクレ条件が与えられたとすると，以下の汎関数の変分を考えることで定式化が可能となる．

$$\begin{aligned}\Pi[\phi]=&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\left[\frac{T}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{k}{2}\phi^2-w\phi\right]dx\\&+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}^i}\lambda_i(\phi_i-\phi_{i+1})d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_0}\lambda_0(\bar{\phi}_0-\phi_1)d\Gamma+\int_{\Gamma_{N+1}}\lambda_{N+1}(\phi_N-\bar{\phi}_{N+1})d\Gamma\end{aligned}\tag{16}$$

ここで，$\Gamma_0,\bar{\phi}_0$ は x 軸負方向にあるディリクレ境界とその境界値， $\Gamma_{N+1},\bar{\phi}_{N+1}$ は x 軸正方向にあるディリクレ境界とその境界値を表している．また，Γ_{int}^i は i 番目の要素と $i+1$ 番目の要素との接触境界であり，ラグランジュ乗数 λ_i は要素境界毎に $\nabla\phi_i,\nabla\phi_{i+1}$ を用いて定義できる物理量である．また，端部におけるラグランジュ乗数 λ_0, λ_{N+1} は ϕ_1, ϕ_N を用いる事により定義できる．

式(16)の汎関数の変分を 0 にすることにより，DGFEM による有限要素式を導出することができる．

c) 不連続値の評価・制御について

以上の定式化から，要素境界に 2 つの不連続な解析値が与えられることになる．これら 2 つの不連続値に関しては，評価方法として平均値をとることが，Ben.Q.Li[3]によって提案されている．

また，Zienkiewicz et al.[4]は，汎関数に下記の安定化項を付加し，ペナルティ関数法により不連続性を制御する手法を提案している．

$$\Pi_s[\phi]=\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}^i}\frac{\tau_i}{2}(\phi_i-\phi_{i+1})^2d\Gamma\tag{17}$$

ここで τ_i は要素境界毎に定義することができ，ペナルティ係数の役割を果たす安定化パラメータであり， τ_i の値を大きくする事で，要素間の不連続値が制御されることとなる．

式(16)の汎関数に式(17)の汎関数を付加すると，

$$\begin{aligned}\Pi[\phi]=&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\left[\frac{T}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{k}{2}\phi^2-w\phi\right]dx+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}^i}\lambda_i(\phi_i-\phi_{i+1})d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_0}\lambda_0(\bar{\phi}_0-\phi_1)d\Gamma+\int_{\Gamma_{N+1}}\lambda_{N+1}(\phi_N-\bar{\phi}_{N+1})d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}^i}\frac{\tau_i}{2}(\phi_i-\phi_{i+1})^2d\Gamma\end{aligned}\tag{19}$$

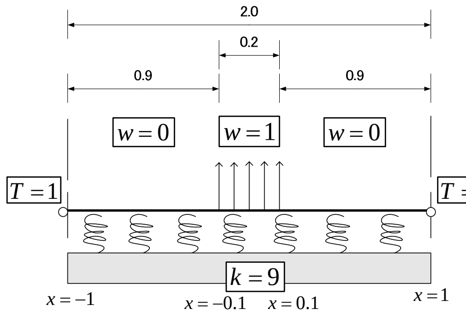
式(19)の変分問題を考えることにより，要素境界における不連続値を制御して解析を行うことが可能となる．

なお，安定化項の変分は以下のようになる．

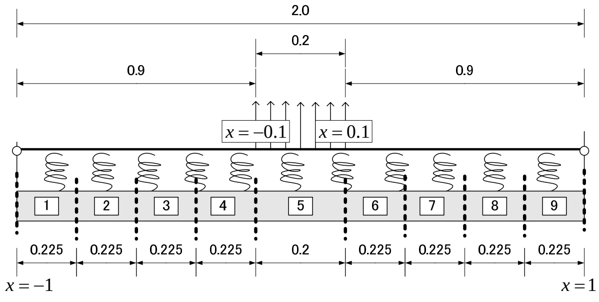
$$\delta\Pi_s[\phi]=\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}^i}\tau_i(\phi_i-\phi_{i+1})(\delta\phi_i-\delta\phi_{i+1})d\Gamma\tag{18}$$

３．解析モデル

本研究の解析に用いた解析モデルを**図−1**に示す．弦の中央部において， $T=1,\ k=9,\ w=1$ とし，その両側では $T=1,\ k=9,\ w=0$ としている．また， $x=-1$ における端部の境界とその境界値を $\Gamma_0,\bar{\phi}_0$ とし， $x=1$ における端部の境界とその値を $\Gamma_{N+1},\bar{\phi}_{N+1}$ としている．端部は固定されており，$\bar{\phi}_0=0,\ \bar{\phi}_{N+1}=0$ とする．解析には $\phi_i,\ \delta\phi_i$ に対して一次の形状関数を与えて解析を行った．また，要素分割は 9 要素,18 要素,36 要素の 3 パターンを考え，9 要素の場合の要素分割のモデルを**図−2**に示す．18 分割，36 分割する場合は 9 要素の場合を基準に要素を 2 倍，4 倍に等分割することにより，要素数を増やすこととする．



図−1. 解析モデル



図−2. 要素分割（9 要素の場合）

４．解析結果

a) θ の値による比較

$\theta=0, \theta=1, \theta=0.5$ の場合において，不連続値をそのままプロットした解析結果を **図-3**～ **図-5**に示す． $\theta=0, \theta=1$ の場合に着目すると， $\theta=0$ の場合は連続性に関して，風上側に重み付けをした定式化になっているため， x 軸負側の節点の解析精度が高い解析結果となっており，要素数の増加に伴い，左右対称な形へと収束している．逆に $\theta=1$ の場合は連続性に関して，風下側に重み付けをした定式化になっているため， x 軸正側の節点の解析精度が高い解析結果となっており，こちらも要素数の増加に伴い左右対称な形へと収束にしている．そして， $\theta=0$ の場合と $\theta=1$ の場合は互いに解析結果が対称であることから， $\theta=0$ の場合は風上側で， $\theta=1$ の場合は風下側で同等の重み付けをして解析できていることもわかる．しかし， $\theta=0, \theta=1$ の場合には，要素数を増加させても最大たわみの解析値と理論値との間にややズレが生じていることがわかる．

次に， $\theta=0.5$ の場合に着目すると， $\theta=1, \theta=0$ の場合に比べて不連続値の差は大きく現れているが, 風上側, 風下側で, 要素数に関わらず左右対称な形となっている．このことから $\theta=0.5$ の場合，風上側，風下側で同等の重み付けをして解析を行った結果が反映されている事がわかる. また, 最大たわみの大きさに関しては， $\theta=0, \theta=1$ の場合とは違い，ほぼ理論解と一致している．

b) 不連続値の評価・制御についての比較

$\theta=0.5$ の場合において, 境界における 2 つの不連続値の平均値をプロットした解析結果を**図-6**に示す．要素数が多い場合は，両端部を除く全ての解析点において理論値とほぼ等しい解析結果が得られているのに対して，要素数が少ない場合は，弦の中央部を除く，全ての解析点において，理論値と解析値の間に大きなズレがある事がわかる．

一方，両端部では要素数にかかわらず，理論値と解析値の間にズレが生じているが， 理論値である $\bar{\phi}_0=0, \bar{\phi}_{N+1}=0$ と境界 Γ_0, Γ_{N+1} に生じる不連続値の平均値をプロットしていることによるものだと考えられる．

次に安定化パラメータ τ を導入して行った解析結果を，**図-7**，**図-8**に示す． τ について，Zienkiewicz et al.は自身の論文中で $\tau \approx 5T/h$ という値を用いている．本研究では， τ は式中においてペナルティ数と同様の役割を果たすと判断されることから，得られるマトリックスの値に対して極端な値として，Zienkiewicz et al.の論文中での値 $\tau \approx 5T/h$ と，その 10 倍にあたる $\tau \approx 50T/h$ を用いて解析を行った．どちらの結果においても，端部ではディリクレ境界条件の値に一致していることがわかる．

$\tau \approx 5T/h$ の場合，36 要素，18 要素で解析を行うと，全ての要素境界において，不連続値の差をほぼ 0 に制御できていることがわかるが，9 要素で解析を行うと，中央部においてやや不連続値が生じていることがわかる．しかし， $\tau \approx 50T/h$ とした場合，全ての要素数において，中央部での不連続値の差をほぼ 0 に制御できていることがわかる．以上の事から， τ は DGFEM による有限要素式の中で，ペナルティ数の役割を果たし， τ の値の増加に伴って不連続値を制御できていることが確認できた．

また，境界での不連続値に関しては，平均値として評価するよりも，安定化パラメータ τ を導入にして制御する方が, 精度の高い解析結果を得られることがわかった．

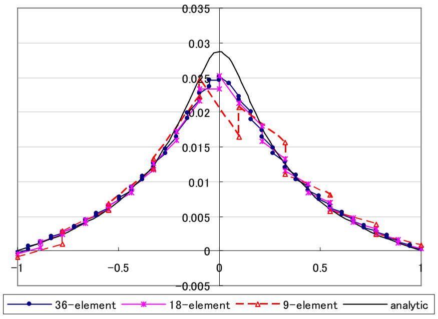


図-3. 解析結果（θ=0, τ=0）

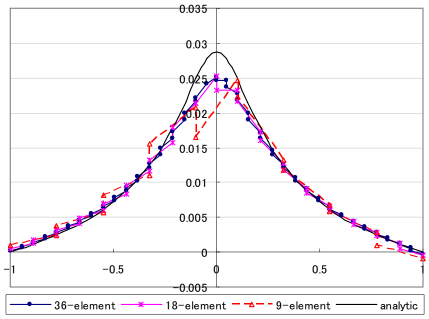


図-4. 解析結果（θ=1, τ=0）

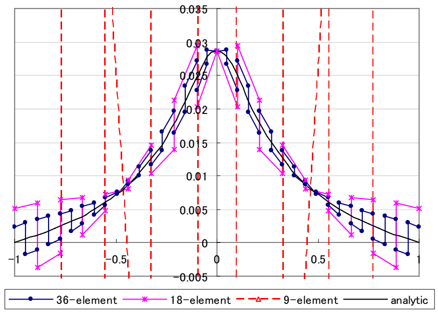


図-5. 解析結果（θ=0.5, τ=0）

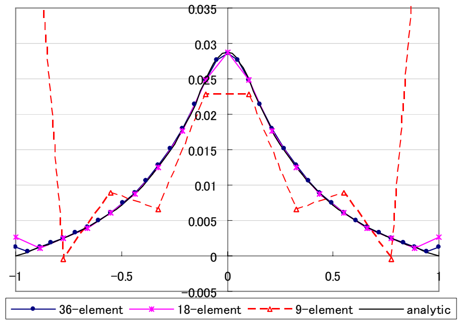


図-6. 解析結果（θ=0.5, 平均値）

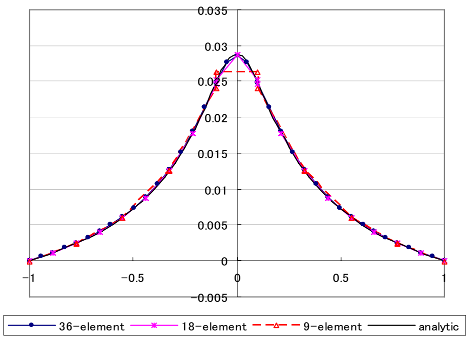


図-7. 解析結果（θ=0.5, τ≒5T/h）

c)通常の FEM との比較

前述の通り，式(16)の汎関数において，$\Gamma_0, \Gamma_{\mathrm{int}}^i, \Gamma_{N+1}$ に関する境界積分項を考慮しないことで，一般的なFEMによる有限要素式を導出することができる．同様の弦のたわみ問題に対し，一次の形状関数を用いて，9 要素，18 要素，36 要素として前述の通りに要素分割してFEMにより解析を行い，DGFEMとの比較を行った結果を**図-9**～**図-11**に，また，解析手法による弦の中央部での最大たわみの値をまとめたものを**表- 1**に示す．

図-9～**図-11**より，要素数に限らず，安定化パラメータτの値を大きくするにつれてDGFEMによる解析値がFEMによる解析値に近づいているのがわかる．また，弦の中央部での最大たわみの値をまとめた**表- 1**からも要素数や安定化パラメータの増加に伴い，DGFEMによる解析値がFEMによる解析値に近づいていることがわかる．

以上の事から，当解析モデルにおいて，一次の形状関数を用いた場合は，安定化パラメータを適切な値に設定する事で，一般的な FEM と比較して遜色のない精度で解析を行えることが実証できた．

５．まとめと今後の課題

本研究では，変分原理から不連続ガラーキン有限要素法による有限要素式を導出し，ラグランジュ乗数の値が解析値に与える影響，不連続値を評価・制御する手法，当手法と一般的な有限要素法との定式化の過程やその解析精度について検討を行った．ラグランジュ乗数については，今回扱った解析モデルにおいては移流や極端な物性値の変化等のある問題を扱っていないため，風上側，風下側に重み付けをしない $\theta = 0.5$ としてラグランジュ乗数を設定することで精度の高い結果を与える事が確認できた．

また，不連続値の評価・制御については平均値により評価するよりも，ペナルティ関数法により，不連続値を制御する事で解析精度の高い結果を得る事が確認できた．

今後，以上の解析結果を踏まえて，DGFEM が高い解析精度を有するとされている，物性値が極端に変化する問題や，移流が卓越する問題について，理解を深める予定である．

６．参考文献

1) 鈴木俊一，本島貴之，苗村由美，久保紳，蟹江俊仁：局所不連続ガラーキン有限要素法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動・各種移行解析の高度化，土木学会論文集Ｃ，Vol.65(2009)，No.3，pp703-705

2) 鈴木俊一，本島貴之，：局所不連続ガラーキン法の 3 次元移流分散問題への拡張，土木学会第 64 回年次学術講演会，CS5-072，pp277-278

3) Ben Q .Li : Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer, Springer pp.1-104 (2006)

4) O.C.Zienkiewicz et al. : On Discontinuous Galerkin Methods, International Journal for numerical methods in engineering (2003)

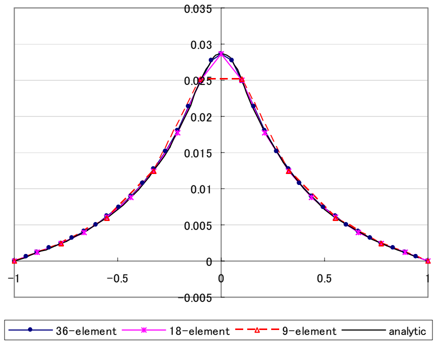


図-8．解析結果（θ=0.5，τ≒50T/h）

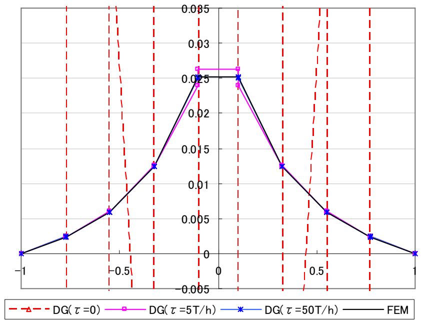


図-9．FEM との比較（9 要素）

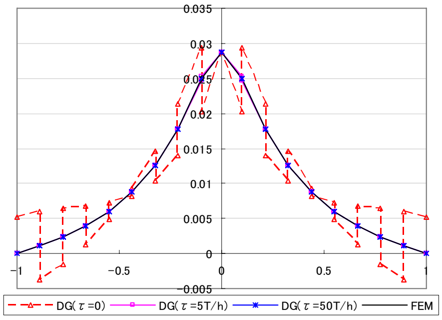


図-10．FEM との比較（18 要素）

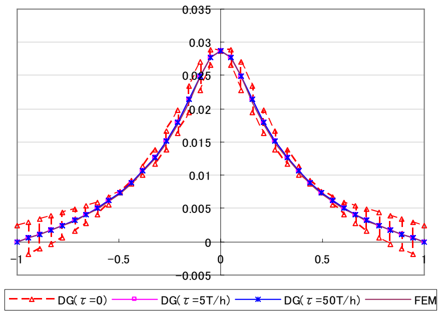


図-11．FEM との比較（36 要素）

表- 1．解析手法による最大たわみの値の比較

	τ=0	τ=5T/h	τ=50T/h	FEM
9 要素	-0.12182	0.02625	0.02523	0.02511
18 要素	0.02941	0.02870	0.02870	0.02870
36 要素	0.02884	0.02864	0.02864	0.02865