

円形リングにおける温度応力

Thermal stresses in rings

北海道大学工学部

○ 学生員 長縄佑吾(Yugo Naganawa)

北海道大学大学院工学研究科

正員 三上 隆(Takashi Mikami)

1. はじめに

寒冷地道路トンネルは寒さによる凍害や、トンネル内空と覆工背面の地山との温度差により、覆工内で温度差が生じ、温度応力が発生する。そのため、覆工では、変形やひび割れが生じるなどの悪影響が見られる。

そのため、トンネル設計の段階で温度応力を把握することが極めて重要であるが、温度応力算定式というのは、式中に積分項や対数項が含まれており、応力の導出が複雑である。

そこで、本研究では、矢板工法で施工されたトンネルを覆工厚さ方向に温度差（温度分布の形状は任意）のある円形リングでモデル化し、それを基に温度応力の厳密解を導き、さらに設計実務者の使用容易性を考えて、厳密解を基に実用的な温度応力算定式を導くことによって、上述した問題の解消に役立てることが目的である。

2. 覆工内における簡易化された温度分布式の導出

2.1 円形リングのモデル

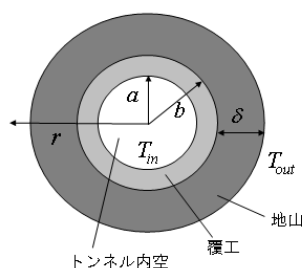


図-1 円形リングのモデル

図-1 に解析モデルを示す。ここで、 a は内径、 b は外径、 r はリング中心から半径方向への長さ、 T_{in} はトンネル内空温度、 T_{out} は年平均気温、 δ はトンネル建設地点において年平均気温となる不易層の位置を表す。

2.2 覆工内の温度分布式の簡易化

本研究では、覆工内の温度分布式を定常状態として誘導する。すると、温度分布式は式(1)で表すことができる。

$$\frac{T}{T_{in}} = f(r) \left(\frac{T_{out}}{T_{in}} - 1 \right) + 1 \quad (1)$$

また、

$$f(r) = \left\{ \frac{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{a}}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{b+\delta}{b}} \right\}$$

となり、ここで λ_1 、 λ_2 は熱伝導率を表す。

次に、式(1)を簡易化するために $f(r)$ を多項式で近似す

る。すると、式(2)で表わされるような 3 次の多項式で近似することができる。ここでは変数を r から z に変換させている。また、近似前後での数値的誤差はおおよそ 5.0×10^{-5} 程度である。

$$f(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D \quad (2)$$

式(2)における A, B, C, D は定数、 z は覆工の中心軸から半径方向への長さを表している。図-2 にそのモデルを示す。

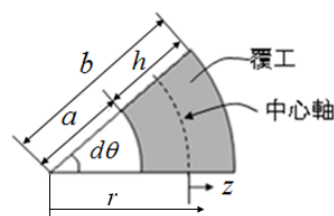


図-2 円形リング微小要素

2.3 近似式に含まれる係数の算定

本研究において数値計算に用いるトンネルの諸元は、 $\lambda_1=1.3(\text{W/mK})$ 、 $\lambda_2=1.0(\text{W/mK})$ 、 $\delta=10(\text{m})$ 、内径： $a=2.5 \sim 5.0(\text{m})$ 、覆工厚： $h(=b-a)=0.4 \sim 0.6(\text{m})$ の範囲で考える。ここでは、 a と h が式(2)の近似式における係数 (A, B, C, D) に与える影響を検討するため、上記の範囲内で $a=0.1(\text{m})$ 、 $h=0.01(\text{m})$ ごとにそれぞれ a, h を変化させて最小二乗法によって近似式を求め、まずはその式に表れる係数と a の関係を a を変数として再び最小二乗法によって検討する。その後、それをさらに同様の手法を用いて h についても検討する。

以上のような検討の結果、近似式に表れる係数とトンネル内径・覆工厚の関係は以下ようになる。

$$A = A_1 a^4 + A_2 a^3 + A_3 a^2 + A_4 a + A_5 \quad (3.1)$$

$$A_1 = 0.00008 h^2 - 0.00021 h + 0.00022$$

$$A_2 = -0.00856 h^2 + 0.00361 h - 0.00392$$

$$A_3 = 0.00856 h^2 - 0.02371 h + 0.02643$$

$$A_4 = -0.02501 h^2 + 0.07078 h - 0.08216$$

$$A_5 = 0.02817 h^2 - 0.08254 h + 0.10286$$

$$B = B_1 a^4 + B_2 a^3 + B_3 a^2 + B_4 a + B_5 \quad (3.2)$$

$$B_1 = -0.0001 h^2 + 0.00028 h - 0.00033$$

$$B_2 = 0.00168 h^2 - 0.00493 h + 0.00601$$

$$B_3 = -0.01115 h^2 + 0.03343 h - 0.04237$$

$$B_4 = 0.03376 h^2 - 0.10479 h - 0.1421$$

$$B_5 = -0.04032 h^2 + 0.13342 h - 0.20949$$

$$C = C_1 a^4 + C_2 a^3 + C_3 a^2 + C_4 a + C_5 \quad (3.3)$$

$$C_1 = 0.00008 h^2 - 0.00027 h + 0.00032$$

$$C_2 = -0.00141 h^2 + 0.00493 h - 0.0061$$

$$C_3 = 0.00963 h^2 - 0.0348 h + 0.04576$$

$$C_4 = -0.03037 h^2 + 0.11683 h - 0.17252$$

$$C_5 = 0.0394 h^2 - 0.17729 h + 0.4191$$

$$D = D_1 a^3 + D_2 a^2 + D_3 a + D_4 \quad (3.4)$$

$$D_1 = 0.00015 h^2 - 0.00061 h$$

$$D_2 = -0.00217 h^2 + 0.00925 h + 0.00004$$

$$D_3 = 0.01114 h^2 - 0.05292 h - 0.00019$$

$$D_4 = -0.0248 h^2 + 0.17915 h + 0.00033$$

このように式(2)は Z , a , h で表すことができる。

2.3 近似式の評価

上記の近似式に、例として、内径・覆工厚・温度に任意の値を与えて、式(1)で求める温度の理論値と比較すると最大誤差がおおよそ $1.0 \times 10^{-3} \sim 1.0 \times 10^{-4}$ となった。

これより、この近似式からは十分正確な値が得られることがわかる。

3. 簡易化された温度応力式の導出

3.1 モデル

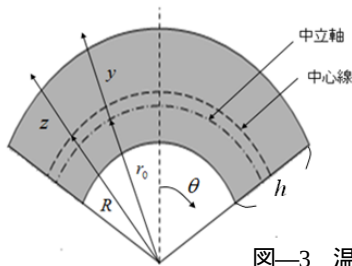


図-3 温度応力式導出のモデル

図-3に温度応力式導出に用いるモデルを示す。ここで、 h は覆工厚、 r_0 はリング中心から覆工内の中立軸までの長さ、 y は覆工内の中立軸から半径方向への長さ、 R はリング中心から覆工内の中心軸までの長さ、 z は覆工内の中心軸から半径方向への長さを表している。

3.2 温度応力式の導出

図-3 で表わされるパラメータには以下のような関係式が成立する。

$$\beta = \frac{h}{R}, \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad r_0 = \frac{b-a}{\ln(b/a)}, \quad \eta_0 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right)$$

$$y = h(\eta - \eta_0), \quad \int_A \eta dA = 0, \quad R = \frac{a+b}{2}$$

この関係式を用いて、温度応力式を導出すると、式(4)となる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E} = & -T + \frac{1}{A} \int_A T dA + \frac{1}{A} \left[\int_A T \eta dA - \int_{\eta_0}^{\eta} T d\eta dA \right] \left[\frac{\beta(\eta_0 - \eta)}{\eta_0(1 + \beta\eta)} \right] \\ & + \frac{\beta}{1 + \beta\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} T d\eta - \frac{\beta\eta(1 + \beta\eta_0)}{\eta_0(1 + \beta\eta)A} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{T d\eta}{1 + \beta\eta} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\sigma_{\theta\theta}$ は円周方向の応力、 α は線膨張係数、 E は弾性係数を表す。

3.3 温度応力式の簡易化

式(1)の温度分布式を式(4)に代入すると応力式に対数関数が含まれるなど大変複雑な式となる。よって、本研究では、式(2)の簡易化した温度分布式を式(4)に代入し応力式を求めることが有効であると考え。

そこで、ここでは式(4)に式(2)の項を一つずつ代入し各々についての応力式を求め、その式に数値を代入して得た応力を足し合わせることによって全体の応力を求める。

1例として、式(2)における1次項である Cz を式(4)の T に代入して応力式を導出する。

すると、式(5)のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E C} \left\{ \frac{2(1 + \beta\eta)}{h} \right\} = & -\beta\eta^2 - \eta + \frac{1}{12} \beta - \frac{\beta\eta}{12\eta_0} \\ & - \frac{\eta}{\beta\eta_0} \cdot (\beta^2\eta_0^2 - 1) \left[1 - \frac{1 + \beta\eta_0}{\beta} \log \left(\frac{2 + \beta}{2 - \beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで再び

$$\beta = \frac{h}{R}, \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad r_0 = \frac{b-a}{\ln(b/a)}, \quad \eta_0 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right)$$

$$y = h(\eta - \eta_0), \quad \int_A \eta dA = 0, \quad R = \frac{a+b}{2}$$

という関係から式(5)の対数項が1になることがわかるので、最終的に式(2)の1次項(Cz)における応力式は

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E C} \left\{ \frac{2(1 + \beta\eta)}{h} \right\} = -\beta\eta^2 - \left(1 + \frac{\beta}{12\eta_0} \right) \eta + \frac{1}{12} \beta \quad (6)$$

となり、四則演算のみで表わされる簡易化された式となる。

同様に、式(2)のそれぞれの項を式(4)に代入して応力式を導出すると、

[定数項(D)の場合]

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E D} (1 + \beta\eta) = 0 \quad (7)$$

[2次項(Bz^2)の場合]

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E B} \left\{ \frac{3(1 + \beta\eta)}{h^2} \right\} = -2\beta\eta^3 - 3\eta^2 + \left(\frac{\beta}{6} - \frac{1}{12\eta_0} - \frac{1}{\beta} \right) \eta + \frac{1}{4} \quad (8)$$

[3次項(Az^3)の場合]

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha E A} \left\{ \frac{4(1 + \beta\eta)}{h^3} \right\} = -3\beta\eta^4 - 4\eta^3 + \left(\frac{1}{12\beta\eta_0} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{3\beta}{80\eta_0} + \frac{1}{12} \right) \eta + \frac{3}{80} \beta \quad (9)$$

となる。ここで、式(6)~(9)の A, B, C, D は式(3.1)~式(3.4)で定められる定数であり、以上が式(2)の温度分布を与えた場合の温度応力式である。

4. まとめ

本研究では、簡易化された温度応力式の導出について検討した。その結果、従来の対数項などを含んだ複雑な式から、四則演算のみで計算することができる簡易化された温度応力式を導出することができた。今後は温度分布式についてさらに簡易化できればよいと考えている。

参考文献

1) Bruno A. Boley, Jerome H. Weiner; THEORY OF THERMAL STRESSES, John Wiley & Sons, Inc., 1960