弾性チューブの曲げ挙動における断面扁平化メカニズムの解析的検討

Analytical Investigation on Cross-Sectional Ovalization for Elastic Tube under Bending

北海道大学工学部	○学生員	梶田寛人 (Kajita Hiroto)
北海道大学大学院工学研究科	正 員	佐藤太裕(Motohiro Sato)
北海道大学大学院工学研究科	学生員	飯干晃太朗(Kohtaroh Iiboshi)

1. はじめに

チューブのような円筒シェル構造では、軸方向の曲げ を受けると断面がつぶれるように変形することが知られ ている^{1),2)}.また、多層構造を持つチューブにおいて層 と層の間にバネのような弾性体を挟んだ時、コアの作用 によって断面のつぶれが抑制されると考えられる.本研 究では、曲げ作用における断面の変形とコアの力学的役 割を明確にすることを目的とする.

2. 解析モデル



図―1 解析対象とするチューブ構造



図-2 断面のつぶれ



図―3 多層構造を持つチューブ

本研究の解析対象とする弾性チューブ(厚さt,長さ L,半径 a_n)は半径と比べ,層が非常に薄い(ヤング 係数E)として薄肉理論を適用し,ポアソン比vの影 響は考慮しないものとする.層と層の間のバネはそれぞ れ独立なバネ(バネ定数k)の集合として扱う.弾性チュ ーブは大きさMの純曲げを受けて軸方向に内外チュー ブ共通の曲率Cを生じ,それに伴って断面がつぶれる 現象を,はじめの直径から短軸方向に減少した長さの割 合を表す楕円化率 ζ によって表現する.多層構造を持 つ弾性チューブは最外管の半径の単位長さを1として0. 1 ずつ層を配置していくものとする.ここで検討を行う 数理モデルは,ある程度の大変形に対しても弾性的に挙 動をするものとする.

3.現象の定式化

位置 (a, θ, z) におけるチューブの半径,円周,軸方 向変位をそれぞれw,v,uとすると変形により生じる 円周方向と軸方向のひずみエネルギーはそれぞれ式(1), (2)になる.ただし,微分記号'は式(1)では θ による微 分,式(2)ではzによる微分を表す.

$$U_{\theta,i} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[Et \left\{ \frac{v_i' + w_i}{a_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_i - w_i'}{a_i} \right)^2 \right\}^2 + \frac{Et^3}{12} \left(\frac{v_i' - w_i'}{a_i^2} \right)^2 \right] a_i d\theta dz$$
(1)

$$U_{z,i} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[Et \left(u_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 + \frac{1}{2} v_i'^2 \right)^2 + \frac{Et^3}{12} w_i'^2 \right] a_i d\theta dz$$
(2)

$$U_{k,i-1} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} k_{i-1} (w_{i-1} - w_i)^2 a_{i-1} d\theta dz$$
(3)

全体のエネルギーUは式(1)~(3)において全層数を足 し合わせることにより以下のように表せる.

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_{\theta,i} + \sum_{i=1}^{N} U_{z,i} + \sum_{i=2}^{N} U_{k,i-1}$$
(4)

上記のひずみエネルギーに*i*層における安定つりあい状態の変位

$$w_i = a_i \zeta_i \cos 2\theta \tag{5}$$

$$v_i = -\frac{1}{2}a_i\zeta_i\cos 2\theta \tag{6}$$

$$u_i = C\left(z_i - \frac{L}{2}\right) \left[a_i \sin \theta + w_i \sin \theta + v_i \cos \theta\right]$$
(7)

を代入し、下式を適用することで楕円化率*ζi*を曲率*C*の関数として表すことができる.

$\partial U / \partial \zeta_i = 0$	(8)
-------------------------------------	-----

$$\zeta_i = \zeta_i(C) \tag{9}$$

また,単位長さ当たりのひずみエネルギーを曲率*C*で 微分すれば断面に生じる曲げモーメント*M*を曲率*C*で 表すことができる.

$$M = \partial U / \partial C \tag{10}$$
$$M = M(C) \tag{11}$$

4. 解析結果と考察

以下,解析結果を図-4~8に示す.なお,図-4~8は 全て $C^* = Ca_1$, $M^* = M / Eta_1^2$, $k^* = ka / E$ としてパラメ ータを無次元化し、半径に対するチューブの厚さを $t/a_1 = 0.02$ として計算を行った. 図-4 は N = 1 つまり単 管ではあるが管の内部を半径方向のバネで支えている状 態の曲率と断面のつぶれの関係を、バネ定数を 4 通りに 変化させた場合についてプロットしたグラフである.曲 率の増加に伴い楕円化が進んでいくことがわかるが、管 の内部をバネで支えた時はチューブのみの場合($k^* = 0$) に比べバネの影響により楕円化しにくくなることが読み 取れる. 図-5 はC*=0.01 とした時の層数と最外管の楕 円化率の関係ついて、バネ定数を 3 通りに変化させた場 合について表したグラフである. 層数が増えるに伴って 楕円化が抑制されていることが読み取れる. 図-6 は $k^* = 0.001$ として N = 6 までの曲率と曲げモーメント の関係を表したグラフである. 層数が多い, つまり内部 が詰まった状態のほうが曲げモーメントが大きく増加す ることが読み取れる. 図-7 は $C^* = 0.01$ とした時の層数 と曲げモーメントの関係を表したグラフである.バネ定 数が大きければ、それに伴って曲げモーメントが増加す ることが読み取れる. 図-8 はバネ定数を 3 通りに変化 させ、 $C^* = 0.015$ とした時の断面全体の変形形状の解析 結果である. バネ定数が大きいチューブは外管のつぶれ が抑制され、断面全体が一体となってつぶれていくのに 対して,バネ定数が小さいチューブは外管が大きくつぶ れるが内側の管にいくほどつぶれていないのが見て取れ る.

5. まとめ

本研究は曲げを受ける弾性チューブの厳密な解析への 基礎研究として行ったものである.本研究を通し,多層 構造を持つ弾性チューブの安定つり合い状態での断面の 変形の理論的な解析をすることができた.これにより, 単層のチューブに比べ,層数を増やし,層と層の間にバ ネを挟んだチューブのほうが,断面の扁平を大幅に抑制 できることがわかった.本研究により得られた知見を生 かし,今後は,断面の扁平化による影響を考慮しない多 層構造を持つ弾性チューブの曲げ座屈の解析へ拡張させ る予定である.

参考文献

- Brazer, L. G: On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections, Proceedings of the Royal Society of London, A116, 104-114, 1927.
- Karam, G. N. & Gibson, L. J. : Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores – I. Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 32:pp. 1259-1283.

