一次せん断変形理論に基づいた深い二重曲率シェルの自由振動解析

Free vibration analysis based on first-order shear deformation theory of doubly curved shells

函館工業高等専門学校　正　　員　渡辺　力 (Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校　学生会員　菊池練人 (Rento KIKUCHI)

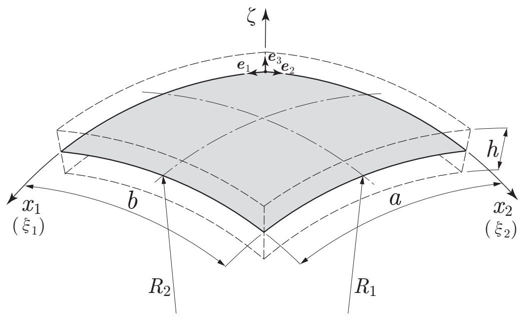
1.　まえがき

表面に曲率を有する曲面構造体はシェルと呼ばれ，膜応力の発生により大空間構造では平板よりも有利な構造である．原子炉格納容器やトンネルなど土木建築構造物では，その曲率半径に比べて厚さの比較的大きな厚肉シェルが用いられている．

せん断変形を考慮したシェルの研究には Naghdi[1)], Reissner[2)] の研究や Mirsky と Herrmann の二次近似理論[3)]などがあるが，中厚のシェルに対する厚肉シェル理論は積層シェルの研究で多く用いられている．例えば，Chaudhuri と Abu-Arja[4)] は積層円筒シェルに，Leissa と Chang[5)] は二重曲率を有する積層偏平シェルに一次せん断変形理論を用いている．これらの研究では直交曲線座標系におけるひずみ – 変位関係式[6)]から得られるひずみ成分が用いられているが，薄肉シェルの Love 理論と同様に，中央面に対する法線まわりのモーメントのつり合い条件を球形シェルなどの特別な場合を除いて満足しないことになる．

それに対して，Reddy[7)] は Sanders の方法[8)]によりひずみ成分を修正して，法線まわりのモーメントのつり合い条件を満たすひずみ – 変位関係式を用いて二重曲率を有する積層偏平シェルの級数解を求めている．しかし，Reddy の研究では偏平シェルの仮定が導入されており，渡辺と林は一次せん断変形理論以外の仮定や近似を用いずに，深い二重曲率シェルに対して正確な解析解を求めている[9)]．

本研究では，法線まわりのモーメントのつり合い条件を満たすひずみ – 変位関係式[9)]を用いて，一次せん断変形理論に基づいた深い二重曲率シェルの自由振動を定式化し，正確な解析解を求める．合応力の中に現れる $\frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)}$ などの法線方向 ζ に関する定積分項も正確に取り扱っている．円筒シェルと球形シェルの数値計算により，それらの固有振動モードを三次元弾性理論に倣って分類するとともに，シェルの振動特性と Reddy の偏平シェル理論の適用性について考察している．



図–1　二重曲率を有する厚肉シェル

2.　深い厚肉シェルの定式化

(1)　シェルの幾何形状とひずみ成分

シェルの幾何形状を**図–1** に示す．シェルの中央面に直交曲線座標 (x_1, x_2, ζ) を設け，シェル厚を h，x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a, b，シェル中央面の曲率半径を R_1, R_2 とする．

シェルの任意点の変位 $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ は，中央面の座標軸 x_1, x_2, ζ 方向の変位 u_1, u_2, u_3 と，x_1, x_2 軸まわりの回転変位 ϕ_2, ϕ_1 を用いて次式で与えられる．

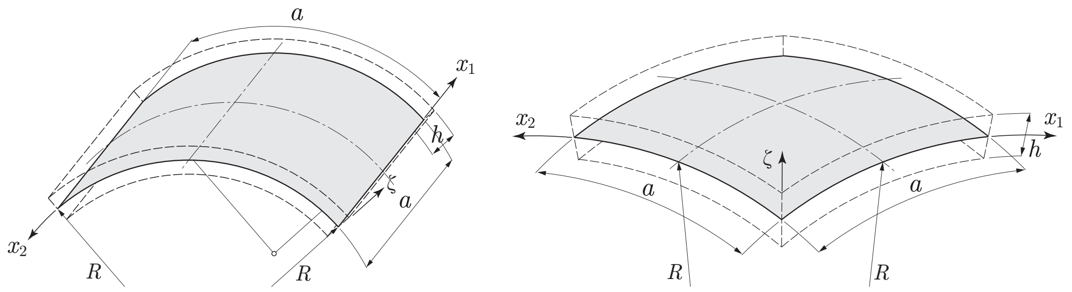
$$\overline{u}_1 = u_1 + \zeta\,\phi_1, \quad \overline{u}_2 = u_2 + \zeta\,\phi_2, \quad \overline{u}_3 = u_3 \qquad (1)$$

ひずみ成分には，直交曲線座標系におけるひずみ–変位関係式[6)]から得られるひずみ成分を法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件を満足するように修正した次式のひずみ成分[9)]を用いる．

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left\{\varepsilon_1^0 + \zeta\kappa_1\right\} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left\{\varepsilon_2^0 + \zeta\kappa_2\right\} \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left\{\varepsilon_{12}^0 + \zeta\kappa_{12}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left\{\varepsilon_{21}^0 + \zeta\kappa_{21}\right\} \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\,\gamma_{23}^0, \quad \gamma_{13} = \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\,\gamma_{13}^0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_3}{R_1}, \qquad \kappa_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\
\varepsilon_2^0 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{R_2}, \qquad \kappa_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}
\end{aligned}$$



(a) 円筒シェル($h/a=0.1$)　　(b) 球形シェル($h/a=0.1$)

図–2 計算モデル

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^0_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\varepsilon^0_{21}\\
\kappa_{12} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}\underline{-\frac{1}{2R_1}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right\}}\\
\kappa_{21} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\underline{+\frac{1}{2R_2}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right\}}\\
\gamma^0_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\phi_2-\frac{u_2}{R_2},\quad \gamma^0_{13}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\phi_1-\frac{u_1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

なお，Reddy は偏平シェルの仮定により，式 (2) において $1/(1+\zeta/R_i)\approx 1$，式 (3) のひずみ成分を $\varepsilon^0_{12}+\varepsilon^0_{21}\equiv\varepsilon^0_6$，$\kappa_{12}+\kappa_{21}\equiv\kappa_6$ として取り扱っている[7]．

(2)　自由振動の定式化

シェルの質量密度を ρ とし，時間 t に関する微分をドット ($\dot{}$) で表すと，シェルの運動エネルギー K は次式で与えられる．

$$
K = \int_V \rho\left\{\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2+\dot{u}_3^2\right\}dV \tag{4}
$$

また，シェルの仮想ひずみエネルギー δU は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\delta U = \int_{\xi_1}\int_{\xi_2}\int_{-h/2}^{h/2} &\left\{\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}+\tau_{12}\delta\gamma_{12}\right.\\
&\left.+\ \tau_{23}\delta\gamma_{23}+\tau_{13}\delta\gamma_{13}\right\}dS_1\,dS_2\,d\zeta
\end{aligned}
\tag{5}
$$

これらをハミルトンの原理に用いて，運動方程式が得られる．

周辺を単純支持されたシェルに対して，中央面の動的変位を次式で仮定する．

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}\cos(\alpha_m x_1)\sin(\beta_n x_2)\,e^{ipt}\\
u_2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} V_{mn}\sin(\alpha_m x_1)\cos(\beta_n x_2)\,e^{ipt}\\
u_3 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}\sin(\alpha_m x_1)\sin(\beta_n x_2)\,e^{ipt}\\
\phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} X_{mn}\cos(\alpha_m x_1)\sin(\beta_n x_2)\,e^{ipt}\\
\phi_2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} Y_{mn}\sin(\alpha_m x_1)\cos(\beta_n x_2)\,e^{ipt}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここに，p は固有円振動数，$i=\sqrt{-1}$ である．

運動方程式に式 (6) を用いて，任意の (m,n) 項に対して次式の固有方程式が得られる．

$$
\left[\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15}\\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25}\\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35}\\ \text{sym.} & & & S_{44} & S_{45}\\ & & & & S_{55}\end{bmatrix} - p^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0\\ & I_0 & 0 & 0 & I_1\\ & & I_0 & 0 & 0\\ \text{sym.} & & & I_0 & 0\\ & & & & I_0\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} U_{mn}\\ V_{mn}\\ W_{mn}\\ X_{mn}\\ Y_{mn}\end{Bmatrix} = \boldsymbol{O} \tag{7}
$$

式 (7) を一般固有値問題として解いて，固有円振動数 p と固有ベクトル U_{mn} などを求める．固有円振動数 p は，次式の無次元振動数 p^* を用いて表す．

$$
p^* = p\,h\sqrt{\rho/G} \tag{8}
$$

3.　数値計算例

(1)　計算モデル

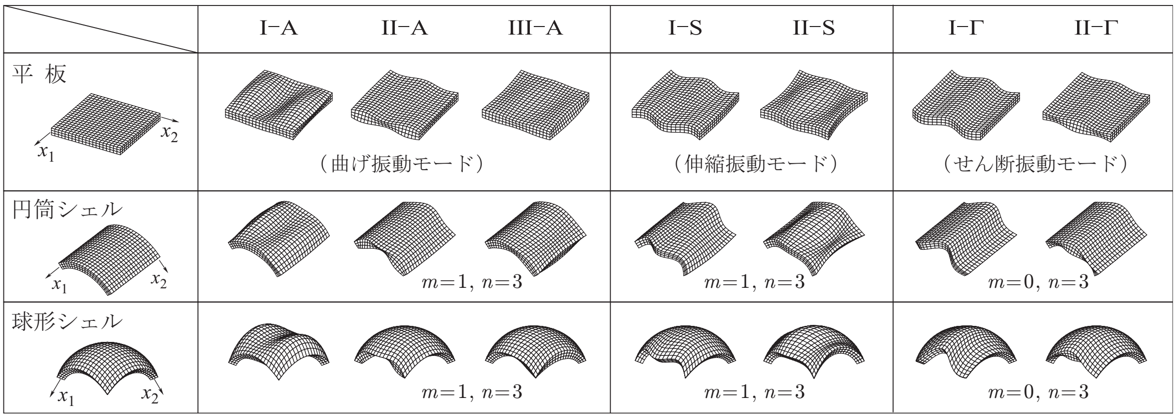
図–2 に示す周辺が単純支持された円筒シェル ($R_1=\infty$, $R_2=R$) と球形シェル ($R_1=R_2=R$) の数値計算を実施する．計算モデルは x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a，板厚比を $h/a=0.1$ とし，ポアソン比は $\nu=0.3$，せん断補正係数には $k=\pi^2/12$ を用いる．

円筒シェル，球形シェルともに，曲率 (a/R) を 0〜$5\pi/6$ まで変化させる．なお，$a/R=0$ は平板である．また，固有振動モードの半波形数 m,n は，それぞれ 0〜3 までの 16 通りについて検討を行う．

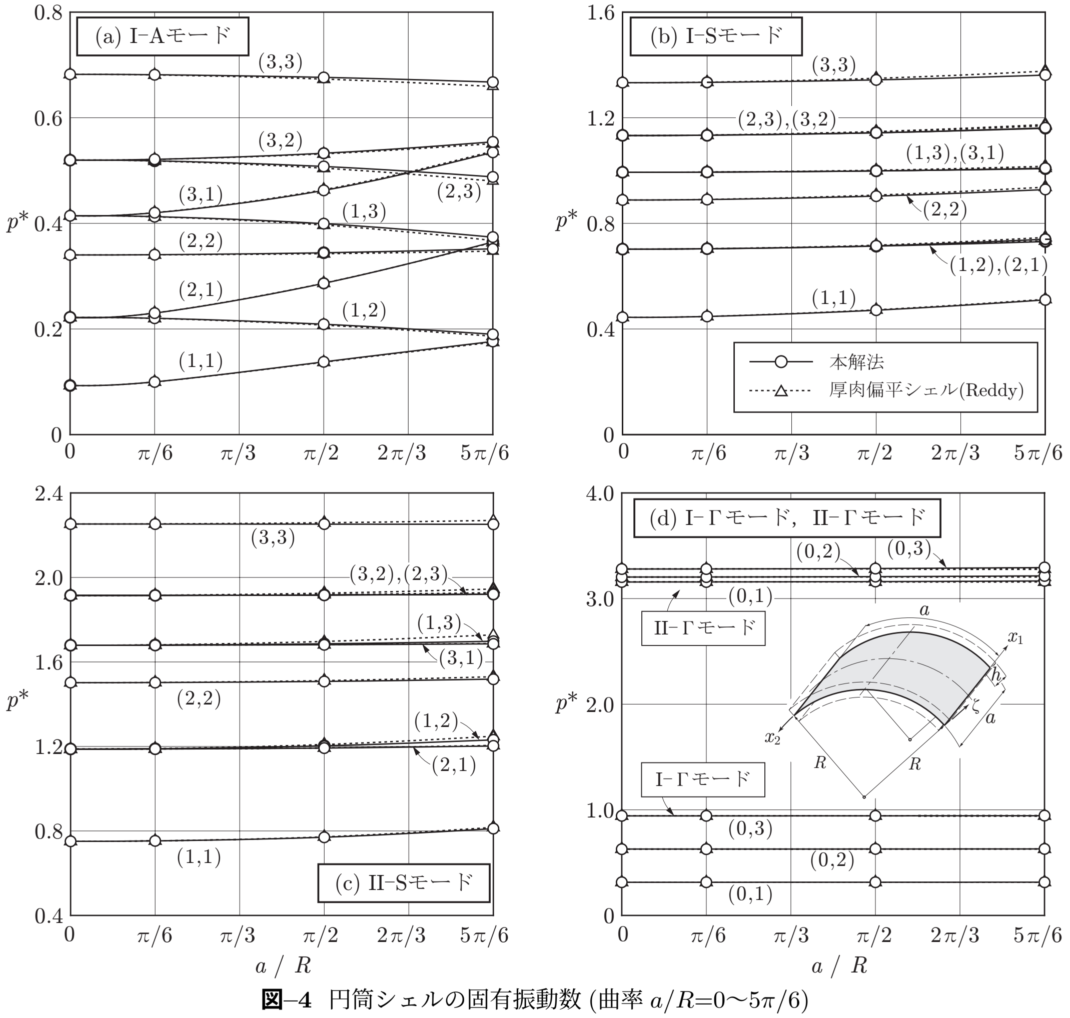
(2)　固有振動モードの分類

Mindlin 平板の固有振動モードは，曲げ振動モード (I−A, II−A, III−A)，伸縮振動モード (I−S, II−S) に分類できる．さらに，$m=0$ または $n=0$ とすると従来の解析的な研究では見落とされている振動モードも存在し，せん断モード (I−Γ, II−Γ) と呼ばれている[10]．

一方，厚肉シェルでは式 (7) の固有方程式から分かるように，面内変位と曲げ変位の連生が生じるので，単純にはモードを分類することができない．本研究では，面内 (U_{mn},V_{mn}) と曲げ (W_{mn},X_{mn},Y_{mn}) の固有



図–3　固有振動モードの分類 (m=1, n=3 および m=0 ,n=3)



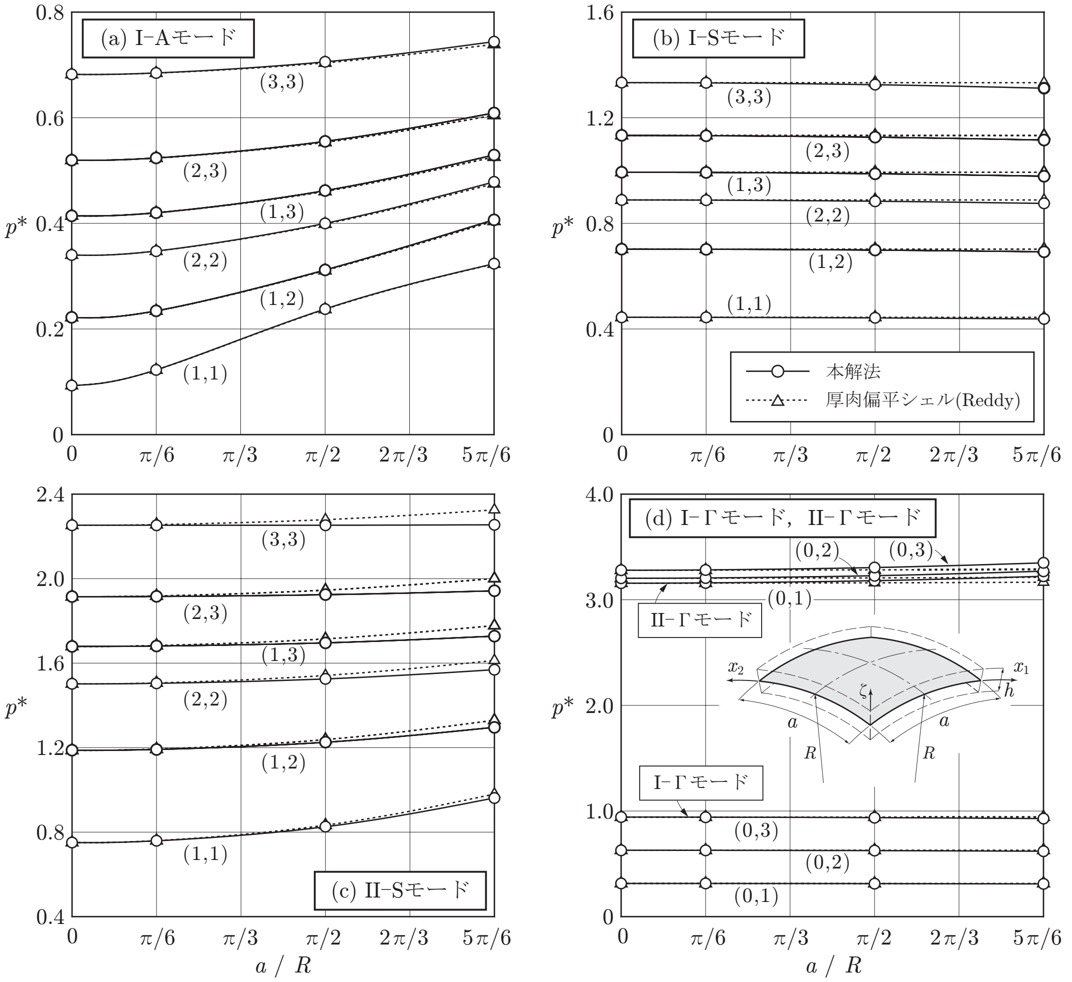
図–4　円筒シェルの固有振動数 (曲率 a/R=0〜5π/6)

ベクトルの大きさにより判断し，固有値の小さい順に，I–A, I–S, II–S, II–A, III–A と分類している．さらに，せん断モード (I–Γ, II–Γ) は，m=0 または n=0 として計算したモードであり，Mindlin 平板と同様にせん断応力のみが生じるモードとなっている．**図–3** に，この方法に従って (m=1, n=3) および (m=0, n=3) 波形のモードを分類した結果を示す．

(3)　固有振動数に与える曲率の影響

曲率 (a/R) を 0〜5π/6 まで変化させたときの円筒シェルの無次元振動数 p^* を**図–4** に，球形シェルの無次元振動数 p^* を**図–5** に示す．図中の括弧内の数値は半波形数 m,n を示しており，実線は本解法，点線は Reddy の偏平シェル理論[7]による結果を示している．

円筒シェル，球形シェルともに，曲率 (a/R) の影響は曲げ振動モード I–A に大きく現れているが，せん断モード I–Γ, II–Γ では曲率の影響をほとんど受けていない．また，従来の解析的な研究で見落とされているせん断モードは厚肉シェルにも存在しており，特に I–Γ モードの固有振動数は I–S よりも小さくなっていることから，極めて重要なモードと言える．



図–5 球形シェルの固有振動数 (曲率 a/R=0〜5π/6)

Reddy の偏平シェル理論[7]による誤差は，どのモードでも曲率 (a/R) が大きくなるに従って大きくなっている．その最大誤差は，円筒シェル (a/R=5π/6) で 1.9%(I–A モード)，球形シェル (a/R=5π/6) で 3.1%(II–S モード) となっており，球形シェルの方が誤差が大きくなっている．

4.　まとめ

本研究では，一次せん断変形理論以外の仮定や近似を用いずに，深い二重曲率厚肉シェルの自由振動における正確な解析解を求めた．数値計算を行って，円筒シェルと球形シェルにおいてもせん断モードが存在することを示した．さらに，Reddy の偏平シェル理論の適用性について考察した．

本研究の一部は,「平成 21 年度原子力人材育成プログラム チャレンジ原子力体感プログラム」事業の一環として研究助成を受けた．関係各位に感謝いたします．

参考文献

1) Naghdi, P.M. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution, *Quarterly Applied Mathematics*, Vol.XV, No.1, pp.41–52, 1959.

2) Reissner, E. : Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, *Journal of Mathematical Physical*, 31, pp.109–119, 1959.

3) Herrmann, G. and Mirsky, I. : Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motion of cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.23, No.4, pp.563–568, 1956.

4) Chaudhuri, R.A. and Abu-Arja, K.R : Closed-form solutions for arbitrary laminated anisotropic cylindrical shells (tubes) including shear deformation, *AIAA Journal*, Vol.27, No.11, pp.1597–1605, 1989.

5) Leissa, A.W. and Chang, J.D. : Elastic deformation of thick, laminated composite shells, *Composite Structures*, 35, pp.153–170, 1996.

6) 土木学会：鋼構造シリーズ 11 ケーブル・スペース構造の基礎と応用, 土木学会, pp.91–136, 1999.

7) Reddy, J.N. : Exact solutions of moderately thick laminated shells, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.110, No.5, pp.794–809, 1984.

8) Sanders, J.L. : An improved first-approximation theory for thin shells, *NASA Technical Report R-24*, 1959.

9) 渡辺　力，林　正：一次せん断変形理論に基づいた二重曲率シェルの正確な級数解, 構造工学論文集, Vol.54A, pp.1–10, 2008.

10) 林　正, 渡辺　力：2 段階動的縮小法を用いたハイアラーキ要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No.619/I-47, pp.35–46, 1999.