掃流層モデルを用いた管路内におけるデューンの線形安定解析

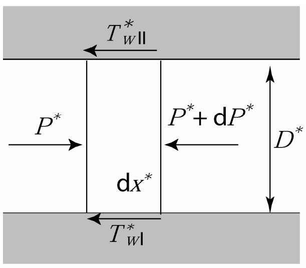
Linear stability analysis of dunes formed in conduits with the use of the bed load layer model

北海道大学大学院工学研究科　○学生員　関　陽平　(Yohei SEKI)
北海道大学大学院工学研究科　　正会員　泉　典洋 (Norihiro IZUMI)

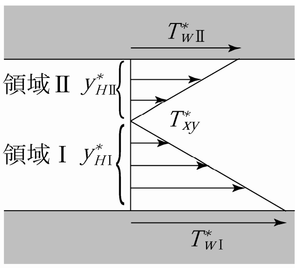
1. はじめに

底面が砂などの移動床で構成されている開水路では，ある条件下において平坦床は不安定となり，河床にはデューンやアンチデューンなどの河床波が形成されることが知られている．これらの河床波は，河床形状と底面剪断力あるいは流砂量の間に生じる位相差が原因となって発生することが知られている[1]が，この際，河床形状と水面形状の間にも位相差が生じる．このことから，デューンやアンチデューンの発生には自由水面の存在が重要であることが推測されるが，自由表面の存在がどの程度重要であるかについては，著者の知る限り判っていない．そこで本研究では，自由水面の存在しない管路内における砂ー水界面の安定性について，理論的に明らかにすることを目的とする．開水路における河床波の安定解析に倣い線形安定解析を行うことによって，安定性を支配するパラメータを明らかにすると同時に，砂面が不安定となりデューンが発生する条件を明らかにする．

2. 流れの定式化



図–1　単位幅水塊に働く力の力の釣合い



図–2　管路内の剪断力分布

解析で考えている管路の条件は以下のとおりである．管路は矩形断面で，幅が高さに比べ充分大きく勾配を有しないものを想定する．管路内部には充分な量の砂が敷かれ，流れは自由水面を持たない場合を考えている．定常状態であれば，流れは勾配がない場合，圧力差のみで生じる．ここで，定常状態のときの剪断力分布について考える．図–1 および 2 は，平坦床の砂面から上側の壁面までの高さを D^*としたときの力の釣合いと剪断力分布を表している．図–1 より管路内の単位幅水塊にかかる力の釣合いを考え，式を整理すると以下のように表すことができる．

$$-\frac{dP^*}{dx^*}D^* = T^*_{\mathrm{I}w} + T^*_{\mathrm{II}w} \tag{1}$$

ここでy^*およびZ^*，P^*，T^*_{w}はそれぞれ高さ方向および砂面の高さ，圧力，剪断力を表し，アスタリスクは次元量を示している．また添え字の I および II はそれぞれ砂面および上の壁面における量であることを示している．次に管路内のある微小要素の流体に着目する．微小要素の流体に働く剪断力と圧力の釣合いを考え，式を整理すると次式が得られる．

$$\frac{dT^*_{xy}}{dy^*} = -\left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right) \tag{2}$$

ここで，圧力勾配 dP^*/dx^* はy^* 方向に対して一定であるため，上式を上下それぞれy^* 方向について積分すると次式がそれぞれ得られる．

$$T^*_{\mathrm{I}xy} = T^*_{\mathrm{I}w} - \left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right) y_{\mathrm{I}}^*,\quad T^*_{\mathrm{II}xy} = T^*_{\mathrm{II}w} - \left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right) y_{\mathrm{II}}^* \tag{3-a,b}$$

両式より剪断力が 0 になる高さy^*_Hを求めると次のようになる．

$$y^*_{H\mathrm{I}} = T^*_{\mathrm{I}w}\left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right)^{-1},\quad y^*_{H\mathrm{II}} = T^*_{\mathrm{II}w}\left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right)^{-1} \tag{4-a,b}$$

y^*_{I}およびy^*_{II}とD^*の関係は次式で与えられる．

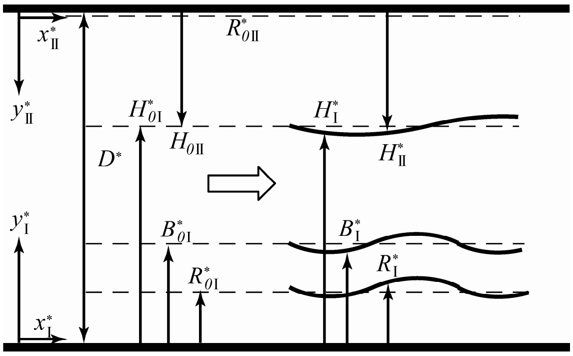
$$y^*_{\mathrm{I}} + y^*_{\mathrm{II}} = D^* \tag{5}$$

式(1)および(4–b)と(5)を整理すると，次の関係が得られる．

$$D^* - y^*_{\mathrm{I}} = D^* - T^*_{\mathrm{I}w}\left(-\frac{dP^*}{dx^*}\right)^{-1} \tag{6}$$

上式の中で右辺の第 2 項が式(4–a) の $y_{H\mathrm{I}}{}^*$と等しい．そのため，$y_{H\mathrm{I}}{}^*$と $y_{H\mathrm{II}}{}^*$は同一の点であることがわかる．従って，この点を境にしてそれぞれの砂面および壁面の摩擦の影響を受ける領域を分けて考えることが出来る．今後，剪断力が 0 となる面を境界としてそれぞれの領域で定式化を行うが，支配方程式および境界条件は両領域に共通である．流れの概念図を図–3 に示す．

x^*およびy^*はそれぞれ流下方向，水深方向の座標系を，U^*およびV^*はそれぞれx^*およびy^*方向の流速を表している． R^* は対数分布則で流速が 0 となる砂面からの高さを表し，以後基準高さと呼び，H^* はそれぞれの基準高さから領域 I および II の境界面までの高さを表している．管路内の流れはそれぞれ無次元化を行った連続の式と Reynolds 平均をとった Navier-Stokes 方程



図–3 流れの概念図

式で表され，以下のようになる．

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{7}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \tag{8}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \tag{9}$$

上式では準定常の仮定を導入し，非定常項を無視している．式(7～9)および管路内の流れにおいて，以下の無次元化を行った．

$$\left(U^*,V^*,U^*_f\right)=U^*_{f0}\left(U,V,U_f\right) \qquad (10-\mathrm{a})$$

$$\left(x^*,y^*,l^*,Z^*,R^*\right)=H^*_0\left(x,y,l,Z,R\right) \qquad (10-\mathrm{b})$$

$$\left(P^*,T^*_{ij}\right)=\rho^*{U^*_{f0}}^2\left(P,T_{ij}\right),\quad \nu^*_T=U^*_{f0}H^*_0\nu_T \qquad (10-\mathrm{c,d})$$

式(10–a,b,c,d)において，l^*およびν^*_T，U^*_f，ρ，$T^*_{ij}(i,j=x,y)$はそれぞれ混合距離および渦動粘性係数，摩擦速度，水の密度，Reynolds 応力を表している．添え字の 0 は平坦床等流状態を表し，無次元化で用いている U^*_{f0}は以下のように表す．

$$U^*_{f0}=\sqrt{\frac{H^*_0}{\rho^*}\left(-\frac{dP^*_0}{dx^*}\right)} \tag{11}$$

式(8)および(9)に現れる Reynolds 応力は混合距離モデルを用いると，次のように表すことができる．

$$Txx=2\gamma_T\frac{\partial U}{\partial x},\quad Tyy=2\gamma_T\frac{\partial V}{\partial y},\quad Txy=\nu_T\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) \qquad (12-\mathrm{a,b,c})$$

$$\nu_T=l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|,\quad l=\kappa(y-Z)\left(\frac{H-y}{H}\right)^{1/2} \qquad (12-\mathrm{d,e})$$

ここで，κはカルマン定数(=0.4)を，Zは砂面までの高さを表している．式(7～9)を解くために，流れ関数Ψを導入する．流れ関数を用いると，流速は以下のように表すことができる．

$$\left(U,V\right)=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y},-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{13}$$

式(13)を式(8)および(9)に代入し，Pを消去すると以下の 4 階の偏微分方程式を導くことができる．

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial y}-4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\gamma_T\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\nu_T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\right]=0 \tag{14}$$

上式を解くにあたり，底面および境界面での境界条件を適用しやすくするために，次のような変数変換を行う．

$$\xi=x,\quad \eta=\left(y-R\right)/H \qquad (15-\mathrm{a,b})$$

式(15–a,b)より変数変換後のηは 0（基準高さ）から 1(剪断力が 0 となる面，境界面)の値をとる．この変数変化を用いると，底面と境界面での境界条件は次式を満たす．

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{ns}=V_h,\quad \boldsymbol{e}_{ts}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{e}_{ns}=0 \quad (\eta=1) \qquad (16-\mathrm{a,b})$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{nb}=0,\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{tb}=0 \quad (\eta=0) \qquad (17-\mathrm{a,b})$$

ここで $\boldsymbol{u}$ は流速ベクトル(=(u, v))，$\boldsymbol{e}_{ns}$および $\boldsymbol{e}_{ts}$は境界面に対する法線および接線方向の単位ベクトル, $\boldsymbol{e}_{nb}$および $\boldsymbol{e}_{tb}$は底面に対する法線および接線方向の単位ベクトル，V_h は境界面における法線方向の流速であり，未知数として与えている．$\mathbf{T}$ は応力テンソルで，次式のように表すことができる．

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-P+T_{xx} & T_{xy}\\ T_{xy} & -P+T_{yy}\end{bmatrix} \tag{18}$$

境界条件中の V_hは未知数であるため，さらに条件を与える．その条件は領域 I とⅡの境界面で与え，接続条件と呼ぶ．接続条件は 2 つあり，境界面において流速と圧力が連続であることである．流速と圧力の接続条件は次のように表すことができる．

$$\left(U_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{I}}\right)=\beta\left(U_{\mathrm{II}},-V_{\mathrm{II}}\right),\quad P_{\mathrm{I}}=\beta^2P_{\mathrm{II}} \qquad (19-\mathrm{a,b})$$

βは無次元化をした流速で表すために導入した値で，両領域の摩擦速度の比で表す．

$$\beta=\frac{U^*_{\mathrm{I}f0}}{U^*_{\mathrm{II}f0}}=\sqrt{\left(\frac{U^*_{\mathrm{I}f0}}{U^*_{\mathrm{II}f0}}\right)^2}=\sqrt{\frac{H^*_{\mathrm{I}0}+R^*_{\mathrm{I}0}}{H^*_{\mathrm{II}0}+R^*_{\mathrm{II}0}}}\approx\sqrt{\frac{H^*_{\mathrm{I}0}}{H^*_{\mathrm{II}0}}} \tag{20}$$

上式中で R^*はH^*_0に比べて非常に小さいため，無視した．

3. 線形安定解析

流れ関数や圧力などに対し次のような摂動展開を導入する．

$$\left(\Psi,P,H,Z,R,B\right)=\left(\Psi_0,P_0,1,0,R_0,B_0\right)+\varepsilon\left(\hat{\Psi}_1,\hat{P}_1,\hat{H}_1,\hat{Z}_1,\hat{R}_1,\hat{B}_1\right) \tag{21}$$

ここで，添え字の 0 と 1 はそれぞれ基本状態と摂動を与えた状態を表している．摂動展開した各変数を式(14)に代入し，整理するとεのオーダーごとにまとめることができる．

3．1　$O(1)$

$O(1)$では平坦床等流を基本状態と考えている．このとき，式(8)および(12– c,d,e)は次のように簡略化される．

$$-\frac{dP_0}{d\xi}+\frac{dT_{xy0}}{d\eta}=0,\quad T_{xy0}=\nu_{T0}\frac{dU_0}{d\eta} \qquad (22-\mathrm{a,b})$$

$$\nu_{T0}=l_0^2\frac{dU_0}{d\eta},\quad l_0=\kappa\left(\eta+R_0\right)\left(1-R_0-\eta\right)^{1/2} \qquad (22-\mathrm{c,d})$$

上式で$-dP_0/d\xi$は式(10－c)および(11)より，1である．基本状態での境界条件は次式で表される．

$$U_0=0,\quad T_{xy0}=1-R_0\qquad(\eta=0)\tag{23}$$

境界条件の下で式（22－a,b,c,d）を解くと，流速は対数分布則に従う．

$$U_0=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\eta+R_0}{R_0}\right)\tag{24}$$

上式と式(15－a,b)で変数変換した式(13)を用いて解くとΨ_0が得られる．また，上式をη=0(基準高さ)から1(剪断力0の位置)の間で積分すると，次の抵抗則が得られる．

$$C^{-1}=\frac{\overline{U}_0^*}{U_{f0}^*}=\frac{1}{\kappa}\left[(1+R_0)\ln\left(\frac{1+R_0}{R_0}\right)-1\right]\tag{25}$$

ここでCは抵抗係数を，$\overline{U}_0^*$は平均流速を表している．

3．2　$O(\varepsilon)$

$O(\varepsilon)$で各変数は次のようになる．

$$\varepsilon\left(\hat{\Psi}_1,\hat{P}_1,\hat{H}_1,\hat{Z}_1,\hat{R}_1,\hat{B}_1\right)=\varepsilon\left(\Psi_1,P_1,H_1,R_1,R_1,R_1\right)\exp[i(\alpha\xi-\Omega t)]\tag{26}$$

ここでεおよびαとΩはそれぞれ摂動を表す振幅，波数および複素角周波数を表している．領域Ⅱの壁面は固定床であるので，R_1=0となる．式(14)に上式を代入し、整理すると摂動項は以下の式で表される．

$$\mathcal{L}^{\Psi}\Psi_1+\mathcal{L}^{H}H_1+\mathcal{L}^{R}R_1=0\tag{27}$$

$$i\alpha P_1+\mathcal{P}^{\Psi}\Psi_1+\mathcal{P}^{H}H_1+\mathcal{P}^{R}R_1=0\tag{28}$$

ここで，$\mathcal{L}^i$および$\mathcal{P}^i$（$i=\Psi,H,R$)はiに対しての線形演算子を表している．ただし，その詳細はスペースの都合上省略する．上式中でも，領域ⅡではR_1が0のため，式(27)の第3項と式(28)の第4項は0になる．同様の理由により，領域Ⅱでは今後もRに関する項は含まれない．

底面の境界条件を用いると次式が得られる．

$$\Psi_1(0)=0,\quad \mathcal{D}\Psi_1(0)=0\tag{29-a,b}$$

ここで$\mathcal{D}$はd/dηである．境界面における法線方向の流速V_hを$\varepsilon V_{h1}\exp[i(\alpha\xi-\Omega t)]$と展開すると，$V=-\Psi_{,\xi}$であるから境界条件は次のようになる．

$$\Psi_1(1)=-V_{h1}\tag{30}$$

Ψ_1を求めるためにChebyshev多項式展開によるスペクトル法を用いる．Ψ_1を次のようなChebyshev多項式展開を用いて表す．

$$\Psi_1=\sum_{n=0}^{N}a_n T_n(\zeta)\tag{31}$$

ここで$T_n(\zeta)$はChebyshev多項式であり，a_nはChebyshev多項式の係数である．Chebyshev多項式は[–1，1]を定義域として持ち，ζの定義域とηの領域とを対応させるために，次の変数変換を行う．

$$\zeta=\frac{2\ln[(\eta+R_0)/R_0]}{\ln[(1+R_0)/R_0]}-1\tag{32}$$

この変換で底面($\eta=0$）は$\zeta=-1$に，境界面($\eta=1$）は$\zeta=1$に対応する．これらを式(32)に用い，Gauss-Lobatte点でそれぞれ式を評価する．Gauss-Lobatte点は次のように表すことができる．

$$\zeta_i=\cos(j\pi/N)\quad(j=0,1,\cdots,N)\tag{33}$$

式(27)に対し，式(31)および(32)と(33)を用いると以下のN+1個の方程式が得られる．

$$\sum_{i=0}^{N}\breve{\mathcal{L}}^{\Psi}a_iT_i(\zeta_j)+\breve{\mathcal{L}}^{H}H_1+\breve{\mathcal{L}}^{R}R_1=0\quad(j=0,1,\cdots,N)\tag{34}$$

ここで　˘　はηからζに変数変換を行った線形演算子である．境界条件も同様にGauss–Lobatte点で評価を行いスペクトル法を用いて，a_nを決定する．スペクトル法を用いると，式(34)および境界条件は以下の式でまとめて表すことができる．

$$\mathbf{L}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}H_1+\boldsymbol{r}R=-\boldsymbol{v}V_{h1}\tag{35}$$

ここで$\mathbf{L}$は$\mathcal{L}$の係数行列, $\boldsymbol{a}$はChebyshev多項式の係数ベクトル, $\boldsymbol{h}$および$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{v}$はそれぞれhおよびrとvの係数ベクトルを表している．式(35)を$\boldsymbol{a}$について解くと次式が得られる．

$$\boldsymbol{a}=-\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{h}H_1-\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{r}R_1-\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{v}V_{h1}\tag{36}$$

上式を式(31)に代入し，接続条件の式(19–a,b)および(30)を用いるとそれぞれの変数がR_1を因数に持ち，次式が成立する．

$$\Psi_1(\eta)=-\left(\mathcal{M}^{\mathsf{H}}\mathsf{H}+\mathcal{M}^{\mathsf{V}}\mathsf{V}+\mathcal{M}^{R}\right)R_1\tag{37}$$

ここで$\mathcal{M}^i$(i=H, V, R)およびHとVは変数に対する線形演算子およびをR_1を因数に持つ形で表したHとVを表している．同様にP_1について求めると以下のようになる．

$$\Psi_1(\eta)=-\left(\mathcal{N}^{\mathsf{H}}\mathsf{H}+\mathcal{N}^{\mathsf{V}}\mathsf{V}+\mathcal{N}^{R}\right)R_1\tag{38}$$

4．流砂の定式化と摂動展開

流砂の連続式より砂面変動と単位幅当たりの掃流砂量の関係は次のように表される．

$$(1-\lambda_p)\frac{\partial B^*}{\partial t^*}+\frac{\partial Q_B^*}{\partial x^*}=0\tag{39}$$

ここでB^*は掃流層上面の高さ, Q_B^*は単位幅あたりの掃流砂量, λ_pは空隙率である．上式に対し無次元化および式(15–a,b)により変数変換を行うと以下の式になる．

$$\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\tag{40}$$

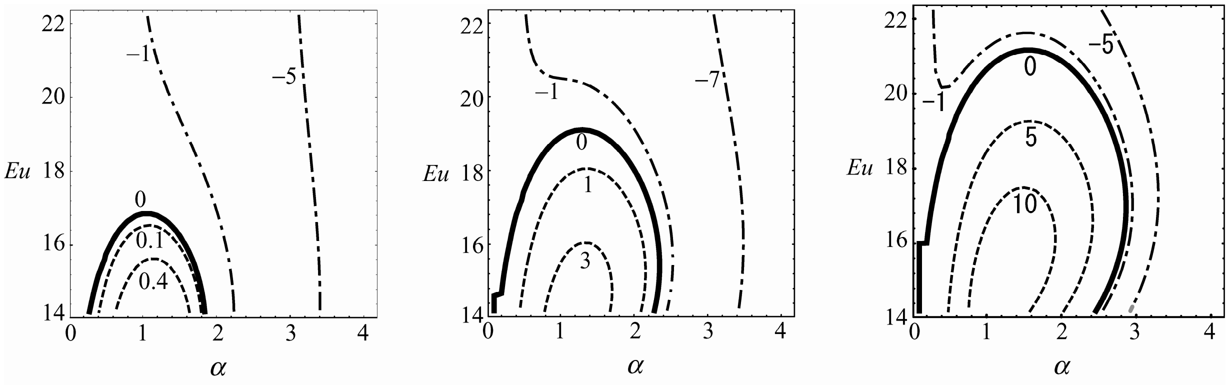
ここでΦおよびtはそれぞれ無次元掃流砂量および時間T^*(=$(1-\lambda_p)/H_0^{*2}/\sqrt{gR_sd_s{}^3}$)で無次元化された時間であり，長さは$H^*{}_{01}$を用い無次元化を行った．

掃流砂量式はColombiniに倣い，局所勾配の影響を取り入れた次のMeyer–Peter & Müller式を用いる．

$$\Phi=8\left(\theta_b-(\theta_{ch}+\mu B_{,x})\right)^{3/2},\tag{41-a}$$

$$\theta_b=\frac{\tau_b^*}{\rho R_s g d_s^*}=\frac{U_{f0}^{*\,2}}{R_s g d_s^*}\tau_b,\quad \mu=\frac{\theta_{ch}}{\tan\Psi}\tag{41-b,c}$$

ここでθ_bおよびτ^*_b, θ_{bh}, R_s, d^*_s, μ, Ψはそれぞれ掃流層上面(y=B)における無次元掃流力および剪断力，基本状態での限界無次元掃流力，水中比重(=1.65)，粒径，局所勾配の影響を表す



図–4　Im[Ω]のコンタ(左からθ_b=0.25, 0.5, 1.0)

無次元パラメータ，摩擦角である．

掃流層モデルはColombini[2)]が用いた次の式を使う．

$$B = h_b + d_s/6,\quad h_b = l_b\, d_s, \qquad (42-\mathrm{a,b})$$

$$l_b = 1 + 1.3\left(\left(\tau_b - \tau_c\right)/\tau_c\right)^{0.55} \qquad (42-\mathrm{c})$$

式(42−c)より無次元剪断力τ_bが一定のとき，掃流層自体の厚さは変化しない．以上を用いると，掃流層上面の高さは次のように摂動展開できる．

$$\left(B,\theta,\Phi\right) = \left(B_0,\theta_0,\Phi_0\right) + \varepsilon\left(i\alpha,\theta_{b1}^R,\Phi_1^R\right)R_1\exp\left[i\left(\alpha\xi - \Omega t\right)\right] \qquad (43)$$

式(40)に上式および(41−a,b,c)と(42−a,b,c)を代入し，式を整理すると以下の式が得られる．

$$\Omega = \alpha\,\Phi_1^R \qquad (44)$$

ここで求められたIm[Ω](Ωの虚部)が式(26)の右辺より摂動の増幅率に相当することがわかる．

5. 結果と考察

式(44)の右辺はα，θ_b, β, Euの4つをパラメータとして持つ．EuはEuller数で慣性力と圧力の比で表すことができ，平坦床等流状態の断面平均流速と摩擦速度から以下のように与える．

$$Eu = \overline{U}{}^*_0/U^*_{f0} = C^{-1} \qquad (45)$$

ここで解析を簡略化するために，底面と壁面の粗度が等しい場合考える．このとき，Euは底面での粒径d_s^*とD^*-Z^*(底面から壁面までの高さ)のみをパラメータとして持ち，表–1にその関係を示す．また，底面と壁面の粗度が等しいという条件の下では上下の領域の剪断力分布が境界面を境に対称形となり，底面および壁面での剪断力と摩擦速度が等しくなる．そのため，式(20)よりβ=1となり，Ωのパラメータはα，θ_b，Euの3つのみとなる．ここではθ_bを一定とし，αとEuを変化させたときのIm[Ω]の値をコンタ図として図–4に示す．

図–4では掃流層上面での無次元掃流力θ_bを0.25，0.5，1.0と与えた場合の摂動の増幅率を示している．図中，破線は摂動の増幅率が正のコンタ，太い実線は0のコンタ（中立曲線），鎖線は負のコンタを表している．増幅率が正であるとき摂動は発達し砂面は不安定となるが，負であれば安定となる．従って，図中の太い実線の内部で砂面は不安定となり，デューンが発生することになる．式(41−a)からわかるように，θ_bが大きいほど無次元掃流砂量は大きくなり，デューンの発生する不安定領域は広がる．その広がる方向はEuler数の正の方向であるが，表–1から分かるようにEuler数が大きくなると，$d^*_s/(D^*-Z^*)$が小さくなる．つまり，底面から壁面までの高さに対する相対粒径が小さくなるほど不安定な領域はEuler数の正の方向へその領域を広げることになる．

表–1　$d^*_s/(D^*-Z^*)$とEuler数の関係

Euler数	$d^*_s/(D^*\text{-}Z^*)$	Euler数	$d^*_s/(D^*\text{-}Z^*)$
22.0	3.3×10^{-4}	21.0	5.0×10^{-4}
20.0	7.4×10^{-4}	18.0	1.7×10^{-3}
17.0	2.5×10^{-3}	16.0	3.7×10^{-3}
15.0	5.5×10^{-3}	14.0	8.3×10^{-3}

また，θ_bが大きくなると増幅率が最大となる波数（卓越波数）は若干大きくなることが判る．ここで界面波の波長λ^*を次のように表す．

$$\lambda^* = 2\pi H_0^*/\alpha \qquad (46)$$

図から増幅率が最大となる波数（卓越波数）は1〜1.5であることがわかる．ここでH_0^*は粗度が等しい条件では$(D^*-Z^*)/2$となることを考慮し，卓越波数に相当する波長の界面波が選択的に発達するとすれば，実際に形成されるデューンの波長は底面から壁面までの高さ$(=D^*-Z^*)$の2〜3倍となることが予想される．今後は，粗度の違いを含めた解析ならびに実験と理論結果を検証することが必要である．

参考文献

1)　Kennedy, J.F.　: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels.　*J. Fluid Mech.*　**16**, Part4, 1963

2)　Colombini, M. : Revisiting the linear theory of sand dune formation.　*J. Fluid Mech.*　**502** , pp.1-16, 2004