

# 弾性体中の2層カーボンナノチューブの半径方向圧力作用に対する 座屈挙動の解析

BUCKLING CHARACTERISTICS OF DOUBLE-WALLED CARBON NANOTUBES EMBEDDED IN  
AN ELASTIC MEDIUM UNDER EXTERNAL PRESSURE

北海道大学工学部 ○学生員 飯干晃太郎 (Kotaro IIBOSHI)  
北海道大学大学院工学研究科 正員 佐藤太裕 (Motohiro SATO)  
北海道大学大学院工学研究科 学生員 嶋崎賢太 (Kenta SHIMAZAKI)

## 1. はじめに

本研究は、弾性体中の2層カーボンナノチューブ (Double-walled Carbon Nanotube, 以下DWCNT)における静水圧状の荷重に対する弾性座屈特性の把握を、連続体力学に基づく形で行うことを目的としている。カーボンナノチューブは炭素原子によって作られるネットワーク (グラフェンシート) が構成する内径数  $nm$  程度の単層または多層の円筒状の物質である<sup>1)</sup>。近年その極めて優れた引張強度特性や電気伝導性に注目が集まり、実験、解析両面から多方面に渡る研究が世界的に進められている。本研究では、引張に比べ比較的弱いとされる半径方向の座屈挙動を解析的に明らかにする。

## 2. 解析モデル

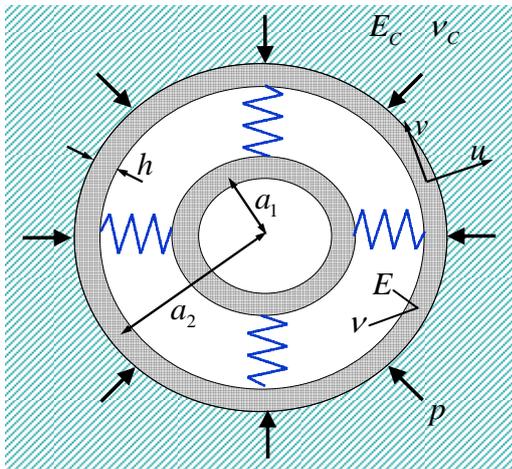


図-1 2層カーボンナノチューブの解析モデル

図-1は解析対象とするDWCNTのモデル図を示したものである。弾性体(ヤング係数 $E_C$ 、ポアソン比 $\nu_C$ )中における2層CNT(ヤング係数 $E$ 、ポアソン比 $\nu$ 、層厚 $h$ 、 $i$ 層における半径 $a_i$ )を円筒シェルとしてモデル化、半径方向に対し圧力が作用する状態を考える。CNTは径に対し非常に長い構造であることから平面ひずみ状態を仮定し、径に対して非常に薄いとして薄肉理論を適用する。また、外力は外側の層に作用する状態を仮定する。

## 2. 座屈挙動の定式化

この場合全ポテンシャルエネルギーは、円周方向の伸びおよび曲げによるひずみエネルギー $U_M$ 、 $U_B$ 、弾性体から受ける力によるひずみエネルギー $U_C$ 、近接す

る層間に作用する van del Waars(vdW)力によるエネルギー $U_I$ 、および外圧力によるエネルギー $\Omega$ の総和として次式で与えられる。

$$U = U[u_i(\theta), v_i(\theta)] = U_M + U_B + U_C + U_I + \Omega \quad (1)$$

式(1)において、 $i$ 層の半径、円周方向の変位 $u_i$ 、 $v_i$ に対して $U_M$ 、 $U_B$ 、および $\Omega$ はそれぞれ次式のように得られる<sup>2)</sup>。

$$U_M = \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i a_i^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{v_i' + u_i}{a_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{v_i - u_i'}{a_i} \right)^2 \right] d\theta \quad (2)$$

$$U_B = \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i a_i^4}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{v_i' - u_i''}{a_i^2} \right)^2 d\theta \quad (3)$$

$$\Omega = p \int_0^{2\pi} \left[ u_i a_i + \frac{1}{2} (v_i^2 - u_i' v_i + u_i v_i' + u_i^2) \right] d\theta \quad (4)$$

ここで

$$\alpha_i = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a_i} \quad (5a)$$

$$\beta_i = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a_i^3} \quad (5b)$$

弾性体によりシェルにかかる応力とせん断応力を $\sigma_r$ 、 $\tau_{r\theta}$ として $U_C$ は次式で得られる。

$$U_C = -\frac{a_2}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_r u_2 + \tau_{r\theta} v_2) d\theta \quad (6)$$

ここで $\sigma_r$ 、 $\tau_{r\theta}$ は文献3)より以下の式を用いる。

$$\sigma_r = (S^{(1)} \bar{u}_2 + S^{(2)} \bar{v}_2) \cos n\theta \quad (7a)$$

$$\tau_{r\theta} = (S^{(2)} \bar{u}_2 + S^{(1)} \bar{v}_2) \sin n\theta \quad (7b)$$

$$S^{(1)} = -\frac{K}{2(3-\mu)a_2} \left[ \frac{4(n+1)}{1+\mu} - 2 \right] \quad (8a)$$

$$S^{(2)} = -\frac{K}{2(3-\mu)a_2} \left[ \frac{4(n+1)}{1+\mu} - 2n \right] \quad (8b)$$

$$K = \frac{E_C}{1-\nu_C^2} \quad (9a)$$

$$\mu = \frac{\nu_C}{1-\nu_C} \quad (9b)$$

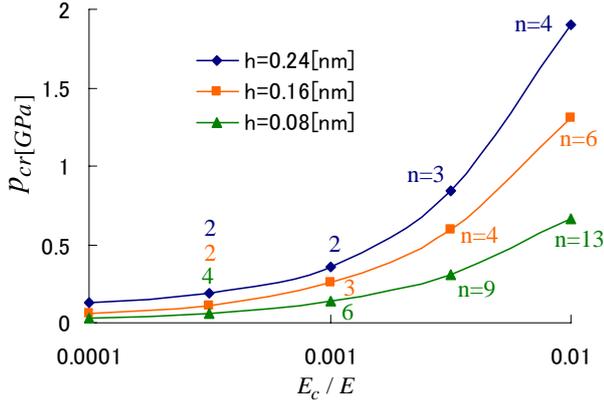


図-2 弾性体のヤング係数  $E_c$  の座屈荷重  $p_{cr}$  に及ぼす影響と座屈のモード  $n$  の値

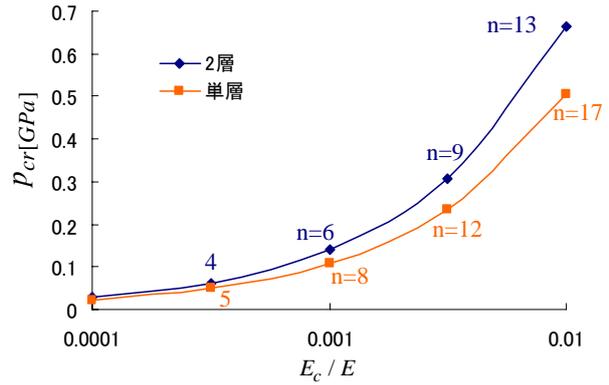


図-3 座屈荷重  $p_{cr}$  の層数による比較と座屈のモード  $n$  の値

また  $U_I$  は以下の形で得られる。

$$U_I = \frac{c_{12}a_1}{2} \int_0^{2\pi} (u_1 - u_2)^2 d\theta + \frac{c_{21}a_2}{2} \int_0^{2\pi} (u_2 - u_1)^2 d\theta \quad (10)$$

vdW 力に関する係数は文献4) より次式を用いる。

$$c_{ij} = - \left( \frac{1001\sigma^{12}}{3D^4} g_{ij}^{13} - \frac{1120\sigma^6}{9D^4} g_{ij}^7 \right) \pi \varepsilon a_j \quad (11)$$

$$g_{ij}^m = \frac{1}{a_i + a_j} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - b_{ij} \cos^2 \theta}} d\theta \quad (12a)$$

$$b_{ij} = \frac{4a_i a_j}{(a_i + a_j)^2} \quad (12b)$$

上記の過程により得られたポテンシャルエネルギーに変分原理を適用することにより、以下の座屈現象に対応する支配方程式が得られる。

$$\alpha_1(v_1 + u_1)' + \beta_1(v_1 - u_1)'' = 0 \quad (13a)$$

$$\alpha_1(v_1' + u_1) - \beta_1(v_1 - u_1)''' + c_{12}a_1(u_1 - u_2) = 0 \quad (13b)$$

$$\alpha_2(v_2' + u_2)' + \beta_2(v_2 - u_2)'' = 0 \quad (14a)$$

$$+ a_2(S^{(1)}v_2 - \frac{1}{n}S^{(2)}u_2') = 0$$

$$\alpha_2(v_2' + u_2) - \beta_2(v_2 - u_2)''' + p(u_2'' + u_2) - a_2(S^{(1)}u_2 + \frac{1}{n}S^{(2)}v_2') - c_{21}a_2(u_1 - u_2) = 0 \quad (14b)$$

ここで  $i$  層の変位として、次式を仮定する。

$$u_i(\theta) = L_i \cos n\theta \quad (15a)$$

$$v_i(\theta) = M_i \sin n\theta \quad (15b)$$

これを式(13)および(14)に代入することで、以下の代数方程式を得られる。

$$C\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (16)$$

これより弾性座屈荷重は次式により得られる。

$$\det(C) = 0 \quad (17)$$

### 3. 解析結果

内側の層の径  $a_1$  の値は  $4.0[nm]$  とした。図-2 は弾性体と CNT のヤング係数の比  $E_c/E$  に対する座屈荷重  $p_{cr}$  の値を CNT の厚さ  $h$  ごとに示したものであり、ま

た、図-3 はそれを  $h = 0.08[nm]$  として層数ごとに示したものである。図-2 より、一定の  $h$  においては弾性体のヤング係数が増加するにつれて座屈荷重も増加していくことがわかる。また、その時の座屈のモード  $n$  の値は次第に増加していく。ヤング係数を一定にして見ると、層が厚くなっていくほど座屈荷重が大きくなっていくことがわかる。次に図-3 より、等しい  $E_c$  においては単層より 2 層の方が座屈荷重が大きい。さらに、弾性体のヤング係数が小さくなるにつれて層数による座屈荷重の差がなくなっていくことが読み取れる。

### 4. まとめ

本研究では、以下の事が明らかとなった。

- ・弾性体のヤング係数が増加すると座屈荷重は増加し、モード  $n$  の値は大きくなる
- ・CNT が厚いと薄い場合より座屈荷重が大きくなり、モード  $n$  の値は小さくなる
- ・単層より 2 層の方が座屈荷重は大きくなるがその差は弾性体のヤング係数に依存する

今後はチューブ層数を増加させた解析を進めることで、多層カーボンナノチューブにおいてみられる特徴的な座屈挙動<sup>5)</sup>における周囲の弾性体の影響について研究を進めていく予定である。

### 参考文献

- 1) Iijima, S: Helical microtubes of graphitic carbon, Nature, **354**, pp.56-58, 1991.
- 2) D.O.Bruth and B.O.Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975.
- 3) James G.A. Croll: Buckling of cylindrical tunnel liners: Journal of Engineering Mechanics, pp.333-341, 2001
- 4) He, X.Q., Kitipornchai, K.M. and Liew, K.M.: Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes: a continuum model accounting for van der Waals interaction, J. Mech. Phys. Solids, Vol.53, pp.303-326, 2005.
- 5) Shima, H. and Sato, M: Multiple radial corrugations in multiwalled carbon nanotubes under pressure, Nanotechnology, **19**(49), 495705, 2008.