平成20年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第65号

弾性チューブの曲げ挙動における新しい数理モデルの提案

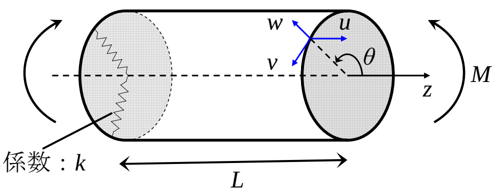
New Mathematical Model for Elastic Tube Bending

北海道大学大学院工学研究科　○学生員　嶋崎賢太 (Kenta Shimazaki)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　佐藤太裕 (Motohiro Sato)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　蟹江俊仁 (Shunji Kanie)
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上　隆 (Takashi Mikami)

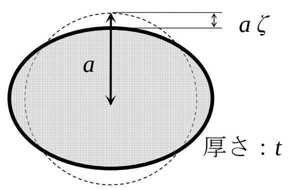
1.　はじめに

本研究は弾性チューブの曲げ荷重作用において湾曲時に圧縮側に生じる「波上のしわ（ripple）」を解析的に記述する数理モデルを構築し，それを用いて曲げ特性を検討することを目的とする．この「波状のしわ」は，近年ナノ材料として世界的な注目を集めるカーボンナノチューブや医療用チューブ，薄肉のパイプラインなど，ある程度の大変形においても弾性的な挙動をするチューブ状構造における曲げ作用時においてよく知られる現象である．しかしながらこの現象は工学の分野でよく用いられる Bernoulli-Euler や Timoshenko 梁理論のような標準的な仮定を用いたものでは到底記述することはできない．このため曲げ座屈を検討する際には新しい定式化が必要となる．本研究では，純曲げを受ける弾性体に接した弾性チューブについて曲げ座屈モードである波状のしわに関する新しい定式化を試みる．

2.　解析モデル



図－1　解析対象とするチューブ構造



図－2　断面のつぶれ

弾性チューブ（厚さ t，長さ L，半径 a）は非常に薄い弾性体（ヤング係数 E）として薄肉理論を適用し，ポアソン比 ν の影響は考慮しないものとする．内側の弾性体はそれぞれ独立なバネ（バネ定数 k）の集合として扱う．弾性チューブは大きさ M の純曲げを受けて軸方向に一定曲率 C を生じ，それに伴って断面がつぶれる現象（Brazier effect[1]）を，はじめの直径から短軸方向に減少した長さの割合を表す楕円化率 ζ によって表現する（図－2）．解析対象とする崩壊形式は後述する圧縮側において周期性を持つ座屈モードである．またここで検討を行う数理モデルは，ある程度の大変形に対しても弾性的に挙動をするものとする．

3.　現象の定式化

位置$(a,\ \theta,\ z)$におけるチューブの半径，円周，軸方向変位をそれぞれ w，v，u とすると，変形により生じる円周方向のひずみエネルギーは以下になる[3]．ただし，微分記号’は θ による微分である．

$$U_\theta=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[Et\left\{\frac{v'+w}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{a}\right)^2\right\}^2+\frac{Et^3}{12}\left(\frac{v'-w''}{a^2}\right)^2\right]ad\theta dz \tag{1}$$

軸方向のひずみエネルギーは以下の式で表す．ただし，微分記号’は z による微分である．

$$U_z=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[Et\left(u'+\frac{1}{2}w'^2+\frac{1}{2}v'^2\right)^2+\frac{Et^3}{12}w''^2\right]ad\theta dz \tag{2}$$

z-θ 方向のせん断変形及びバネの反発力によるエネルギーは以下になる．ただし，安定つり合い状態ではせん断変形は無視する．

$$U_s=\frac{1}{2}Gt\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2ad\theta dz \tag{3}$$

$$G=E/2(1+\nu)=E/2$$

$$U_k=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}kw^2ad\theta dz \tag{4}$$

上記のひずみエネルギーに安定つり合い状態の変位

$$u_0=C\left(z-\frac{L}{2}\right)\left[a\sin\theta+w_0\sin\theta+v_0\cos\theta\right] \tag{5}$$

$$w_0=a\zeta\cos 2\theta \tag{6}$$

$$v_0=-\frac{1}{2}a\zeta\sin 2\theta \tag{7}$$

を代入し，下式を適用することで楕円化率 ζ 及び断面に生じる曲げモーメント M を求める．

$$\partial U/\partial\zeta=0 \tag{8}$$

$$M=\int_0^{2\pi}EtC\left[a\sin\theta+w_0\sin\theta+v_0\cos\theta\right]^2ad\theta \tag{9}$$

次に，座屈時の曲率を求めるため，以下の変位をひずみエネルギー式に代入し 2 次の変分を求める．

$$u = u_0 + u_1$$
$$w = w_0 + w_1 \tag{10}$$
$$v = v_0 + v_1$$

$$\delta^2 U = \delta^2 U_\theta + \delta^2 U_z + \delta^2 U_s + \delta^2 U_k \tag{11}$$

チューブ端部の境界条件を自由端として対象とする座屈波形を以下の変位で表現し，ひずみエネルギーの 2 次変分に代入して積分計算を行うことで，変位の振幅成分 *Si* の関数として求める．ここで，*n* はシェル軸方向の変位の周期，すなわち座屈波数を表す．

$$u_1 = S_1 \sin\theta \cos\frac{n\pi}{L} z \tag{12}$$

$$w_1 = \left[S_2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + S_3 \cos 2\theta \right] \sin\frac{n\pi}{L} z \tag{13}$$

$$v_1 = \left[S_4 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + S_5 \sin 2\theta \right] \sin\frac{n\pi}{L} z \tag{14}$$

$$\delta^2 U = f(S_i) \quad (i = 1, \cdots, 5) \tag{15}$$

式(16)の Trefftz 理論に従い，ひずみエネルギーの 2 次変分を変位振幅で微分して座屈時の支配方程式を導き，それを解くことにより座屈時の曲率 C_{cr} を求める．

$$\delta(\delta^2 U) = 0 \tag{16}$$

$$\partial(\delta^2 U) / \partial S_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, 5) \tag{17}$$

4.　解析結果

図－3 は安定つり合い状態を仮定したときの曲率と楕円化率の関係を，バネがなくチューブのみの場合とバネ定数が 3 通りの場合についてプロットしたグラフである．チューブの厚さと長さのパラメータ *t/a*=0.02，*a/L*=0.1 として計算を行った．グラフのような楕円化の進行に伴って断面の曲げ剛性が低下していき，限界の曲率に達した時点で解析対象の座屈モードで崩壊することになる．

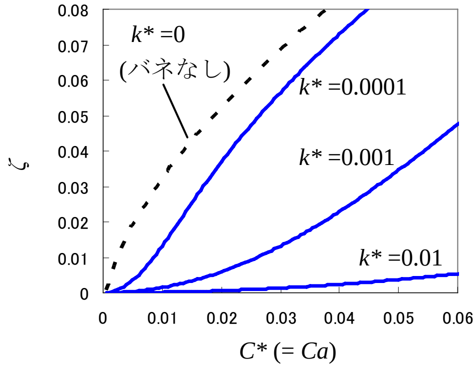
図－4 は横軸にバネ定数，縦軸に曲げ座屈が生じる時の曲げモーメント M_{cr} を表したグラフである．ただし *C*，*M*，*k* は $C^*=Ca$，$M^*=M/Eta^2$，$k^*=ka/E$ として無次元化し，チューブの厚さが 3 通りの場合についてプロットした．これらより，バネ定数の増加とともに限界の曲げモーメントが増加していく様子を読み取ることができる．

図－5 はチューブの厚さが 2 通りの場合について，発生する座屈モードを図示したものである．バネ定数が同じ場合に座屈を生じる限界の曲率及び座屈波数を併せて示した．全般的にチューブが厚いほど座屈波数は小さく，大きな曲率に耐えられる傾向を読み取ることができた．

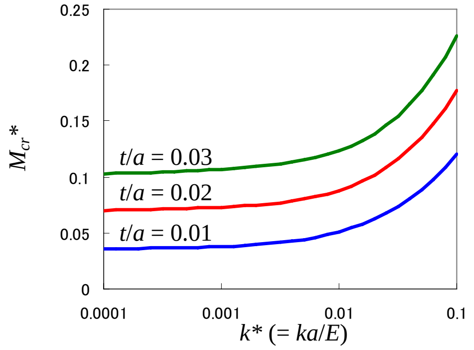
また，今回の解析では弾性体を完全に独立なバネの集合としてモデル化したが，せん断抵抗を有する連続体を想定した場合には，限界の曲率及び曲げモーメントにおいて，より大きな増加が生じるものと予想できる．

5.　まとめ

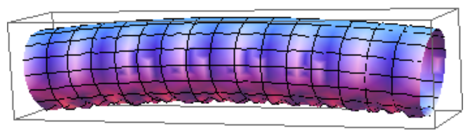
本研究は，曲げを受けるチューブの多様な座屈モードに対応する厳密な解析への基礎研究として行ったものである．本研究を通し，想定する座屈モードを 3 次元の変位で表現し，それが発生する曲率，曲げモーメントを評価する解析手法を示せた．今後は異なる座屈モードを表現する変位形の検討やせん断抵抗を持つ弾性体の支持を受ける場合への拡張を予定している．その際，本研究の定式化はチューブ内側だけでなく，外側に弾性体を持つ場合にも拡張でき，多様な構造形式の解析が可能となる．



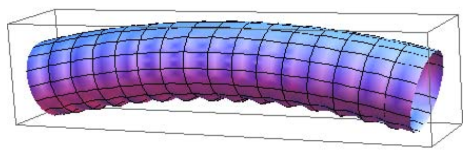
図－3　楕円化率（断面のつぶれ）
（*t/a*=0.02，*a/L*=0.1）



図－4　座屈時の曲げモーメント（*a/L*=0.1）



(*a*)　*t/a*=0.02，曲率 C_{cr}*=0.02347，波数 *n*=42



(*b*)　*t/a*=0.04，曲率 C_{cr}*=0.04789，波数 *n*=29

図－5　座屈モード（*a/L*=0.1，k^*=0.001）

参考文献

1) Brazier, L. G: On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections, Proceedings of the Royal Society of London, A116, 104-114, 1927.

2) M. Khurram Wadee, M. Ahmer Wadee, Andrew P. Bassom and Andreas A. Aigner: Longitudinally inhomogeneous deformation paterns in isotropic tubes under pure bending, Proceedings of the Royal Society of London, A462, 817-838, 2006.

3) D.O.Bruth and B.O.Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975.