

中空円筒体における Timoshenko 梁の適用範囲について

Analogy of a cylindrical shell theory as Timoshenko beam theory

北海道大学工学研究科 ○学生員 松尾優子 (Yuko Matsuo)
北海道大学工学研究科 フェロー 三上隆 (Takashi Mikami)

1. はじめに

近年、構造物の大型化にともない中等厚肉円筒体が各種トンネル、サイロ、タンクや橋梁の橋脚などに採用されており、このような構造要素の詳細な応力特性の把握が、設計精度の向上やコスト縮減の観点から重要になってくる。

中等厚肉円筒体の構造解析では、厚さの増大に伴い面外せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなり、また、厚さ方向の応力一ひずみ成分の影響が現れてくると考えられるため、実務設計で用いられている古典シェル理論の適用が困難になる。一方で、面外せん断変形や回転慣性の影響を考慮した修正シェル理論も数多く提案されているが、理論の高次化に伴い未知量が增大することや高次せん断変形理論に基づく有限要素の定式化や閉じた解の解式に関しては、非常に煩雑になる。

そのため、ここでは予備設計の検討において用いられる理論として、比較的単純に行える Timoshenko 梁に着目し、Mirsky-Herrmann の修正シェル理論²⁾と古典的梁理論とを数値計算により比較し、Timoshenko 梁¹⁾の適用性について検討を行った。

2. 解析方法

対象とする円筒シェルの幾何学的形状を図-1に示す。シェルの半径を R 、長さを L 、厚さを h で表し、経線方向座標を x 、円周方向座標を θ 、半径方向座標を z (外向きを正)で表す。座標 (x, θ, z) に対応する変位成分を (u, v, w) とし、 (x, θ) 軸に垂直な断面の回転成分を (ϕ_x, ϕ_θ) とする。厚肉円筒シェルの変位成分及び回転成分は、Mirsky-Herrmann の修正シェル理論を用いて、境界条件、荷重条件を適用して得た。

3. 数値計算例

数値計算モデルは、両端単純支持の条件下で、 $0 < x < L$ の領域に一樣な分布荷重(荷重強度 q)が、余弦上に分布した面外方向荷重 $q \cdot \cos\theta$ と正弦上に分布した面内方向荷重 $q \cdot \sin\theta$ が作用する場合である(図-1)。各荷重はフーリエ級数により展開を行った。

コンクリート構造物を想定し、ポアソン比 $\nu=1/6$ 、ヤ

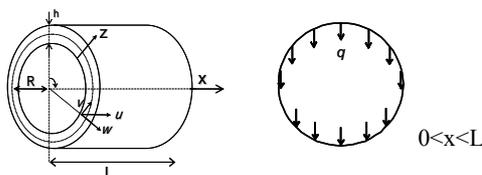


図-1 円筒シェルの幾何学的形状と作用荷重

ング係数 $E=2.1 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$ 、せん断補正係数 $\kappa=\pi^2/12$ を用いた。さらに、 L/R 、 h/R をパラメータとし、スパン中央における変位 w 、及び曲げモーメント M_x と、支点位置のせん断力 Q_x を求め、古典的梁理論、Timoshenko 梁理論、修正シェル理論のそれぞれにおいて比較を行った。これ以降、各理論において計算した値を b, t, m (古典的梁、Timoshenko 梁、修正シェル理論)の添え字で表す。

なお、古典的梁と Timoshenko 梁の w, M_x, Q_x は以下の厳密解を用いて計算を行った。

$$w_b = \frac{q^* L^4}{384EI}$$

$$w_t = \frac{q^* L^2}{8\kappa GA} + \frac{5q^* L^4}{384EI}$$

$$M_{x_b} = M_{x_t} = \frac{q^* L^2}{8}, \quad Q_{x_b} = Q_{x_t} = \frac{q^* L}{2}$$

ただし、ここで $q^*=2\pi Rq$ 、 I は断面 2 次モーメント、 A は断面積、 G はせん断補正係数である。また曲げモーメントとせん断力は直接比較できないので、Mirsky-Herrmann の修正シェル理論による場合は、次式により換算曲げモーメント M_{xm} と換算せん断力 Q_{xm} を用いた。

$$M_{xm} = \pi R^2 \max N_x + \pi R \max M_x$$

$$Q_{xm} = \pi R (\max Q_x + \max N_x \theta)$$

ここで、 N_x, M_x 等は Mirsky-Herrmann の修正シェル理論から得られる合応力、合モーメント等であり、記号 \max は円周方向の最大値を表す。

図-2 は h/R の変化による変位 w の影響を示している。縦軸は w_m と w_t との比で表している。図より w_m / w_t は、 h/R が変化しても影響は小さくほぼ一定値を示している。また、 L/R の増加に伴い、 w_m と w_t の差は徐々に小さくなり、 $L/R=10.0$ 以上ではほぼ 1 に近づいている。

図-3 は L/R の変化による変位 w の影響を示している。縦軸は各理論における変位の相対比で表し、それぞれの

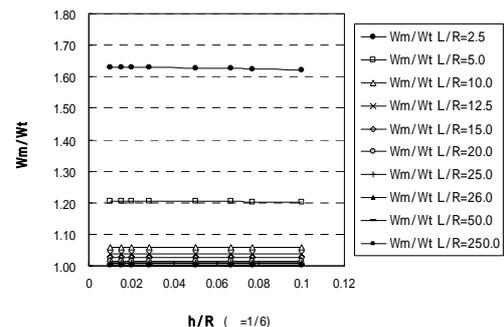


図-2 h/R の変化による w の影響

理論における計算結果と比較した。図よりいずれのケースにおいても $L/R=15.0$ 以上では、1 に近い値に収束している。一方、 $L/R=15.0$ 以下では、 w_t/w_b と w_m/w_b のいずれにおいても大きな値を示し、 w_b と相違が生じている。また、 w_m 、 w_t は両者とも w_b よりも大きい変位となっており、 w_m/w_t は比較的相対比が少ないことが確認できる。なお、ここでは $h/R=1/20$ を取り上げたが、 $h/R=1/100\sim 1/10$ のいずれのケースにおいても同様な傾向となった。

図-4 は、 L/R の変化による曲げモーメント M_x を示している。図より M_{xb}/M_{xt} 、 M_{xm}/M_{xt} とともに 1.0 となり、古典的梁、修正シェル理論においても Timoshenko 梁理論とよく一致している。これらの傾向から、換算曲げモーメントの M_x の計算にあたっては、Timoshenko 梁理論を用いても、さらに単純な古典的梁理論を用いても大きな差が生じないといえる。

図-5 は、 L/R の変化によるせん断力 Q_x を示している。図より Q_{xb}/Q_{xt} は常に 1.0 の値を示しているのに対し、 Q_{xm}/Q_{xt} は 1.0 より小さい値を示している。また Q_{xm}/Q_{xt} は w と同様 $L/R=15.0$ 以降で収束傾向にあり、 L/R が増加するに従い 1.0 に近づく。

図-6 は、 L/R の変化による修正シェル、Timoshenko 梁、古典的梁理論の相対誤差を絶対値を用いて $h/R=1/100$ と $h/R=1/10$ のそれぞれのケースにおいて示したものである。図より変位 w においては w_m と w_b は $L/R=10.0$ 以下では大きく異なり、両者の相対誤差が 5% 以下となるのは $L/R=40.0$ 以上となるのに対して、 w_m と w_t は比較的相対誤差が小さく $L/R=20.0$ 以上で 5% 以下、 $L/R=30.0$ 以上で 3% 以下となっている。換算曲げモーメント M_x においては、図-4 で $M_{xb}=M_{xt}=M_{xm}$ と確認できたように、相対誤差は 0% となっている。また、せん断力 Q_x では Q_{xb} 、 Q_{xt} に対しても $L/R=10.0$ 以上

で 3% 以下となることが確認できる。また、 h/R による影響はせん断力 Q_x において多少見られたが、変位 w 、曲げモーメント M_x においては見られなかった。

4. まとめ

本研究では古典的梁理論、Timoshenko 梁理論、Mirsky-Herrmann の修正シェル理論において数値計算を行い、Timoshenko 梁の適用性を検討した。

梁的な変形を生じる荷重に対する数値計算の結果より、曲げモーメント M_x では、古典的梁理論の M_{xb} 、Timoshenko 梁理論の M_{xt} 、換算曲げモーメント M_{xm} とともに非常によく一致しており、 L/R 、 h/R が変化しても大きな差は生じないことが確認できた。変位 w については、 h/R の影響はなく、 $L/R=15$ 以上の場合において、 w_m と w_t は同程度の値を示した。せん断力 Q_x においては、 h/R が小さくなるに従い若干の影響はあるものの、変位 w が一定値となる $L/R=15$ 以上においてはいずれのケースも 2% 程度以下となった。

これゆえ $L/R=15$ 以上においては、 h/R の影響に関わらず予備設計の段階では修正シェル理論の代替として、Timoshenko 梁を適用することが可能であるといえる。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko : On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars.Philosph.Mag. 41, pp.288-289(1921)
- 2) I.Mirsky, G.Herrmann : Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells,Vol29.No.10,pp.1116-1123(1957)
- 3) 酒井忠明：中空円筒殻体の強制振動による応力の一般解式及び実用解式、土木学会論文集、No.18、pp.52-pp66(S28)

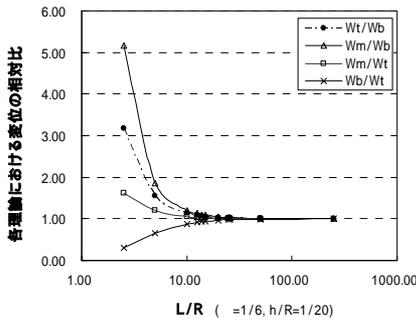


図-3 L/R の変化による変位 w の影響

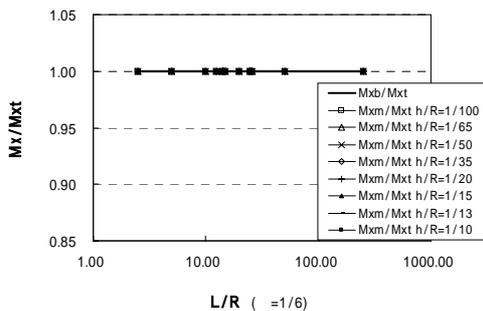


図-4 L/R の変化による曲げモーメント M_x の影響

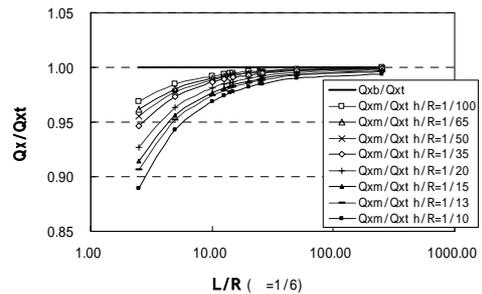


図-5 L/R の変化による Q_x の影響

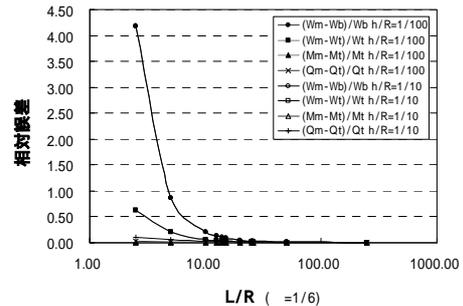


図-6 L/R の変化による相対誤差