

矩形管路内のデューンの線形安定解析

Linear stability analysis of dunes formed in rectangular ducts

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 関陽平(Yohei Seki)

北海道大学大学院工学研究科 正員 泉典洋(Norihito Izumi)

1. まえがき

開水路ではデューンと呼ばれる水深の数割程度の波高を有する河床波が存在する。デューンは水面と河床面の界面不安定現象のため起こるとされ、その形成領域はフルード数と密接に関係している。一方、管路ではデューン形成の成因となる水面と河床面の界面不安定現象は起こらないと考えられる。

Colombini¹⁾ は定断層近似と混合距離モデルを用い、Runge-Kutta積分によるシューティング法を行い線形安定解析を行っている。また、泉²⁾ は混合距離モデルとChebyshev多項式を用いたスペクトル法で河床デューンの線形及び弱非線形安定解析を行っている。今回は泉の方法に倣い、混合距離モデルとChebyshev多項式を用いたスペクトル法を用い、管路内の流れに対応する形に直しデューンの線形安定解析を行う。

2. 定式化

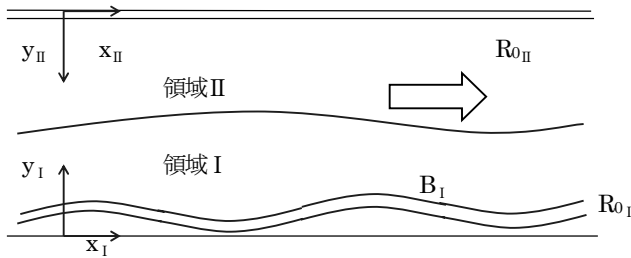


図1 流れの様子

矩形管路内の流れを図1に示すように領域Iと領域IIに分け、座標軸は図1のとおりとする。両領域でそれぞれ Reynolds 平均をとった Navier-Stokes 方程式と連続の式を用い、管路内の乱流を表す。領域Iと領域IIの分け方は後述する。以下、断りがない限り両領域は同じ方程式、条件を満たすものとする。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x 及び y はそれぞれ流下方向、水深方向の座標とし、 U 及び V はそれぞれ x 、 y 方向の流速である。また、 P 及び T_{ij} ($i, j=x, y$) は圧力、レイノルズ応力テンソルである。ここで x 及び y をそれぞれの領域の平坦床基本状態における水深 H_0^* で無次元化

し、 U 及び V については平坦床基本状態における摩擦速度 U_{f0}^* で無次元化する。また P 及び T_{ij} についても平坦床基本状態における底面剪断力 ρU_{f0}^{*2} で無次元化する。レイノルズ応力テンソルは混合距離モデルを用いると、次のようになる。

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y}, \quad T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (4a-c)$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad l = \kappa(y-Z) \left(\frac{H-y}{H} \right)^{1/2} \quad (4d, e)$$

ここで ν_T は $U_{f0}^* H_0^*$ で無次元化した動粘性係数、 l 、 Z 及び H は H_0^* で無次元化した混合距離、河床高さ及び水深であり、 κ はカルマン定数(=0.4)である。

流関数 ψ を導入し、式(1)及び(2)から P を消去すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\gamma_T \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

水面及び底面での境界条件を容易に適用するために次のような変数変換を用いる。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y-R(x)}{H(x)} \quad (6a,b)$$

このとき、水面及び底面の境界条件は以下のように与えることができる。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad (\eta = 1) \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad (\eta = 1) \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad (\eta = 1) \quad (9)$$

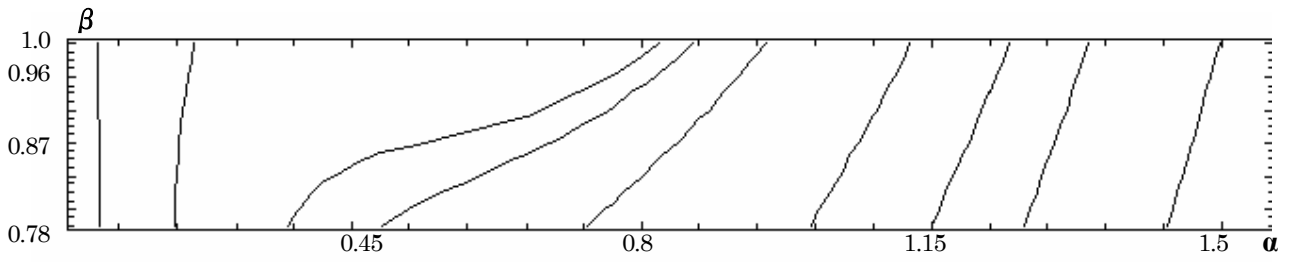
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad (\eta = 0) \quad (10)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb} = 0 \quad (\eta = 0) \quad (11)$$

ここで $\mathbf{u}$ は速度ベクトル $\mathbf{e}_{ns}$ 及び $\mathbf{e}_{ts}$ はそれぞれ両領域の境界面での単位法線ベクトル及び単位接線ベクトルであり、 $\mathbf{e}_{nb}$ 及び $\mathbf{e}_{tb}$ はそれぞれ底面での単位法線ベクトル及び単位接線ベクトルであり、 $\mathbf{T}$ は応力テンソルであり次式で表すことができる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -P + T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P + T_{yy} \end{bmatrix} \quad (12)$$

以上が領域IとIIでそれぞれ成り立つ。両領域の境界面において次の接続条件を用い、接続する。


 図2 増幅率(Ωの虚部)のコンタ $C_I^{-1}=14$ $\mu=0.1$ $m=2.5$

$$U_I(1) = \beta U_{II}(1), V_I(1) = -\beta V_{II}(1), \quad (13a, b)$$

$$P_I(1) = \beta^2 P_{II}(1), H_I^* + H_{II}^* = D^* \quad (13c, d)$$

ここで β は領域Ⅱの摩擦速度を領域Ⅰの摩擦速度で割ったものである。領域Ⅰと領域Ⅱは上式が成り立つ位置を境界とし、両領域に分ける。領域Ⅰにおいて流砂の連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \Phi = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \quad (14)$$

$$\theta_b = \frac{\tau_b^*}{\rho R_s g d_s^*} = \frac{U_{f0}^*}{R_s g d_s^*} \tau_b \quad (15)$$

$$\theta_c = \theta_{ch} + \mu \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \mu = \frac{\theta_{ch}}{\tan \Psi} \quad (16-a, b)$$

ここで B は掃流層上面での高さ、 Φ は無次元掃流砂量 ($= q_s^* / (R_s g d_s^*)^{1/2}$)、 q_s^* は掃流砂量、 R_s は砂粒子の水中比重、 d_s^* は粒径、 t は時間 ($= [d_s^* (R_s g d_s^*)^{1/2}] / [D_0^* (1 - \lambda_{pl} t^*)]$)、 λ_{pl} は空隙率である。Colombini に従い掃流量厚さ $h_b (= B - d_s/6)$ を以下のように表す。

$$h_b = l_b d_s, \quad l_b = 1 + 1.3 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^{0.55} \quad (17)$$

3. 線形安定解析

$$(\psi, P, H, Z, R, B) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0) + A(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{H}_1, \hat{R}_1, \hat{B}_1) \quad (18)$$

ここで添字 0 は平坦床等流を基本状態とし、添字 1 は擾乱を与えた状態とする。また、 A は摂動を表すパラメータとする。

$$(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{H}_1, \hat{R}_1) = (\psi_1, P_1, H_1, R_1) \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \quad (19)$$

ここで α は擾乱の波数、 Ω は擾乱の複素角速度である。式(18)を基本状態における底面の境界条件を用いて解くと次の対数分布則が得られる。

$$U_0 = \log \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (20)$$

上式を $\eta=0$ から 1 まで積分すると次の抵抗則が得られる。

$$C^{-1} = \frac{U_{a0}^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa} \left[(1 + R_0) \ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right] \quad (21)$$

上式中の C は抵抗係数であり、 U_{a0}^* は基本状態における水深平均流速である。次に粗面の対数分布則を変形すると次のようになる。

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30y}{md_s} \right) \quad (22)$$

ここで $U_0=0$ となる高さを R_0 をとくと $R_0 = m d_s / 30$ となる。 m は k_s / d_s を表し、1 から 3 の範囲にあると言われている。

$O(A)$ 、つまり擾乱部分について式(5)は以下のように表すことができる。

$$L^{\Psi}(\eta) \psi_1(\eta) + L^{\Psi}(\eta) H_1(\eta) + L^{\Psi}(\eta) R_1(\eta) = 0 \quad (23)$$

ここで L^i ($i = \psi, H, R$) は線形演算子を表している。ただし詳細は冗長になるので省略する。 ψ_1 を Chebyshev 多項式展開を用い擾乱部分について解いていく。結局、流砂の連続式と式(22)より次のような関係がわかる。

$$\Omega = f(\alpha, \beta; C_I, C_{II}, \mu, m) \quad (24)$$

ここで求められた Ω の虚部が摂動の増幅率に相当する。図に $\alpha - \beta$ 平面上における摂動の増幅率のコンタを示した。今回の条件 ($C_I^{-1}=14$ $\mu=0.1$ $m=2.5$ C_{II}^{-1} を変化させる) の下では Ω の虚部がすべて負であり、デューンが発達しないことがわかる。

4. 考察

今回求めた結果は領域Ⅰの粒径を与え、領域Ⅱの壁面の粗度高さを变えることで β を変化させた。しかし、 β は両領域の摩擦速度の比であるので管路内流れの相対的な値である。このため、流れを決める物理的な指標とは言いがたい。今後はその点について考慮し、矩形管路内のデューンの線形安定解析をしていく必要がある。

5. 参考文献

- Colombini, M. :Revisiting the linear theory of sand dune formation, J. Fluid Mech., 502, pp. 1-16, 2004
- 泉典洋混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形の安定解析, 水工学論文集, 第 51 巻, 2007