平成19年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第64号

掃流砂の非平衡性を考慮した河床デューンの弱非線形安定解析

Weakly nonlinear stability analysis of fluvial dunes incorporating nonequilibrium bedload transport

北海道大学大学院工学研究科　○学生会員　佐藤博重(Hiroshige Satoh)
北海道大学大学院工学研究科　　正会員　　泉　典洋(Norihiro Izumi)

1.　まえがき

フルード数がある程度小さい時，河床にはデューンと呼ばれる水深の数割程度の波高を持った河床波が形成されることが知られている．デューン河床はフルード数の増加とともに平坦床へと遷移し，減少とともにデューン河床へと再び遷移する．ところがこの遷移時に，デューン河床-平坦床遷移の際の臨界フルード数の方が，平坦床-デューン河床遷移の際の臨界フルード数より大きいという，いわゆるヒステリシス現象が現れることが知られている．

Colombini(2004)は定剪断層近似より実際の乱流をよりよく表現できる混合距離仮説を用いてRunge-Kutta積分によるシューティング法を用いて線形安定解析を行っている[1)]．また泉(2007)はColombiniに倣い，混合距離仮説およびChebyshev多項式展開に基づくスペクトルコロケーション法を用いて線形および弱非線形安定解析を行っている[2)]．

河床材料と流れの条件が与えられると”平衡な”流砂量が存在し，十分長い一様な条件の水路では流砂量がこれに等しくなる．しかしながら，一般に流砂の境界条件が様々であったり，水理条件が場所的，時間的に変化するなど流砂現象をとりまく環境が非一様であるためにこのような平衡状態が発生しないことも多い．本研究では，泉が用いた既存のモデルに上記した流砂の非平衡性の影響を導入して線形及び弱非線形安定解析を行い，デューン-平坦床遷移過程を解析する．

2.　定式化

開水路内の乱流は，Reynolds 平均を取った次の二次元 Navier-Stokes 方程式によって表すことができる．

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \tag{1}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}-S^{-1}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ここでxおよびyはそれぞれ流下方向および水深方向の座標，UおよびVはそれぞれxおよびy方向の流速，SおよびPはそれぞれ平均河床勾配および圧力，T_{ij} ($i,\ j=x,\ y$)はReynolds応力テンソルである．定式中では流れの時間変化は河床形状の時間変化に比較して十分早いと仮定し，非定常項を無視している．また上式は既に次のような無次元化が行われている．

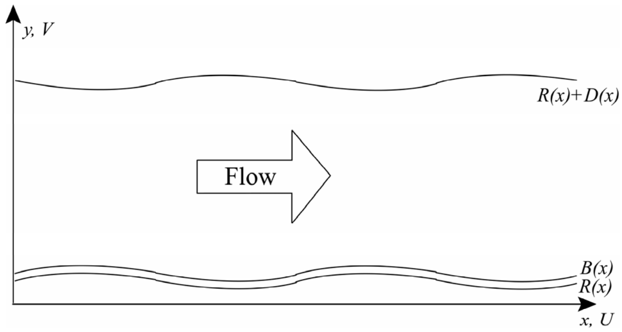

図-1　流れと座標系の概念図

$$(U^*,V^*)=U_{f0}^*(U,V),\ (x^*,y^*)=D_0^*(x,y), \tag{4a, b}$$

$$(P^*,T_{ij}^*)=\rho U_{f0}^{*2}(P,T_{ij}) \tag{4c}$$

ここでU_{f0}^*およびD_0^*はそれぞれ平坦床基準状態における底面摩擦速度および水深である．混合距離仮説を用いるとReynolds 応力テンソルは次のように表すことができる．

$$T_{yy}=2\nu_T\frac{\partial V}{\partial y},\ T_{xx}=2\nu_T\frac{\partial U}{\partial x},\ T_{xy}=\nu_T\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{5a-c}$$

$$\nu_T=l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|,\ l=\kappa(y-Z)\left(\frac{D+R-y}{D}\right)^{1/2} \tag{5d, e}$$

ここでν_Tは$U_{f0}^*D_0^*$で無次元化された渦動粘性係数，l及びZ，D はそれぞれD_0^*で無次元化した混合距離および底面河床高さ，水深，κ はカルマン定数（＝0.4）である．

次のような流れ関数を導入する．

$$(U,V)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{6}$$

以上の流れ関数を導入し，式(1)および式(2)から P を消去すれば次式が得られる．

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}-4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\nu_T\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\nu_T\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right]=0 \tag{7}$$

水面および底面において境界条件の適用を容易にするため次のような変数変換を導入する．

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{y-R(x)}{D(x)} \tag{8a, b}$$

ここで R は対数分則において流速がゼロとなる高さ

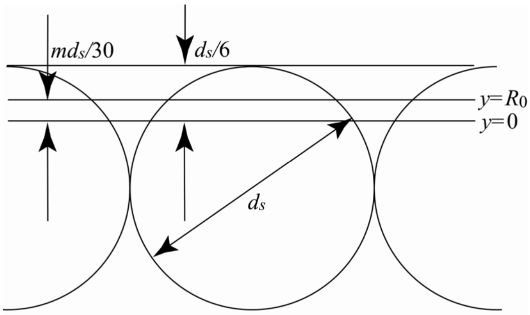

図-2　砂の粒径と原点(y=0)および基準高さ(y=R_0)の関係.

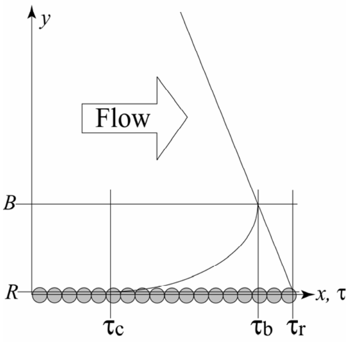

図-3　掃流層の定義

（以降，基準高さと呼ぶことにする）．上式の変数変換を用いると無次元混合距離は次のように表される.

$$l = \kappa D\left(\eta + \frac{R-Z}{D}\right)(1-\eta)^{1/2} \tag{9}$$

水面および底面における境界条件は次のようになる.

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \eta=1 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e}_{ns}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \eta=1 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{e}_{ts}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \eta=1 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{nb} = 0 \quad \text{at} \quad \eta=0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{tb} = 0 \quad \text{at} \quad \eta=0 \tag{14}$$

ここで$\boldsymbol{u}$は流速ベクトル(=(u, v))，$\boldsymbol{e}_{ns}$および$\boldsymbol{e}_{ts}$は水面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{e}_{nb}$および$\boldsymbol{e}_{tb}$は底面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトルである．また$\boldsymbol{T}$は応力テンソルであり次式で表される.

$$T = \begin{bmatrix} -P+T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P+T_{yy} \end{bmatrix} \tag{15}$$

3.　基本解

安定解析の基本状態は平坦床等流状態であるであるから，基本状態では各変数は次のように表すことができる.

$$(U, V, D, Z, R) = (U_0, 0, 1, 0, R_0) \tag{16}$$

支配方程式は以下のようになる.

$$1+\frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0 \tag{17a}$$

$$T_{xy0} = \nu_{T0}\frac{dU_0}{d\eta} \tag{17b}$$

$$\nu_{T0} = l_0^2\frac{dU_0}{d\eta} \tag{17c}$$

$$l_0 = \kappa(\eta+R_0)(1-\eta)^{1/2} \tag{17d}$$

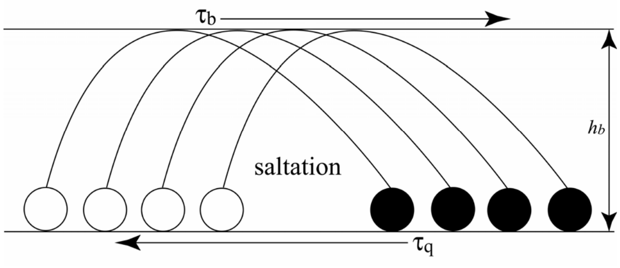

図-4　掃流層におけるせん断応力の定義

ここで添え字0は基本状態を表している．適切な境界条件を用いて以上の式(17a)-式(17d)を解くと以下のような対数速度分布を得る.

$$U_0 = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\eta+R_0}{R_0}\right) \tag{18}$$

ここでR_0は基準状態における基準高さであり砂粒子粒径を用いて以下のように表される（**図-2** 参照）.

$$R_0 = \frac{d_s}{6} \tag{19}$$

ここでのd_sは無次元化した砂粒子粒径である($= d_s^*/D_0^*$).
式(18)を η=0 から 1 まで積分すると，摩擦抵抗則（摩擦係数を C とする）が得られる.

$$C^{-1} = \frac{U_{a0}^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa}\left[(1+R_0)\ln\left(\frac{1+R_0}{R_0}\right)-1\right] \tag{20}$$

ここでU_{a0}^*は基本状態における水深平均流速である.
また対数分布則を変数変換以前の変数を用いて書き表すと次のようになる.

$$U_0 = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{k_s}\right)+8.5 = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{30y}{md_s}\right) \tag{21}$$

ここでk_sはD_0^*で無次元化した等価粗度高さ，mはk_s/d_s，d_sはD_0^*で無次元化した砂の粒径である.

4.　非平衡性掃流砂量

流砂の土粒子の運動は以下のように表せる.

$$\rho_s\left(\frac{\partial q_s^*}{\partial t^*} + u_p^*\frac{\partial q_s^*}{\partial x^*}\right) = \tau_b - \tau_q \tag{22}$$

ここでρ_sは土粒子密度，u_p^*は土粒子速度，τ_b及びτ_qは掃流層（**図-4** 参照）上面及び底面における剪断力であり，土粒子速度は次のように表される.

$$u_p^* = \frac{q_s^*}{(1-\lambda_p)h_b^*} \tag{23}$$

ここでh_b^*は掃流層厚さ，λ_pは空隙率である（= 0.4）．時間微分項を無視し，式(22)を書き直すと次式が得られる.

$$\beta\frac{\Phi}{h_b}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \theta_b - \theta_q \tag{24}$$

ここでΦは無次元掃流砂量（＝ $q_s^*/(R_s g d_s^{*3})^{1/2}$），$R_s$は土粒子の水中比重(=1.65)，$\theta_b$及び$\theta_q$は掃流層上面及び底面におけるShields応力である．無次元パラメータβは次のように表される.

$$\beta = \frac{\rho_s}{\rho(1-\lambda_p)}\left(\frac{d_s^*}{D_0^*}\right)^2 = \frac{(R_s+1)d_s^{*2}}{1-\lambda_p} \tag{25}$$

また平衡状態掃流砂量式として Meyer-Peter ＆ Müller 式を用いる.

$$\Phi = 8\left(\theta_q - \theta_c\right)^{3/2} \tag{26a}$$

$$\theta_c = \theta_{ch} - \mu\left(S - \frac{\partial B}{\partial x}\right) \tag{26b}$$

$$\mu = \frac{\theta_{ch}}{\tan\phi} \tag{26c}$$

ここでθ_cは限界Shields応力，θ_{ch}は平坦床に対応したθ_c，Bは掃流層上面の高さ，ϕは摩擦角である.

Colombini (2004)に倣い，掃流層厚さh_bは次のように表す.

$$h_b = l_b d_s \tag{27a}$$

$$l_b = 1 + 1.3\left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c}\right)^{0.55} \tag{27b}$$

ここでτ_rおよびτ_cはそれぞれ基準高さでの剪断応力及び限界剪断応力である.
河床形状の時間変化は以下の Exner 方程式で表せる.

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{28}$$

5.　線形安定解析

全ての変数を次のように摂動展開する.

$$(\psi, P, D, Z, R, B) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0) + A\left(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1\right) \tag{29a}$$

$$\left(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1\right) = (\psi_1, P_1, D_1, R_1)\exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \tag{29b}$$

ここでパラメータAは微小振幅を表すパラメータであり，α及びΩは波数及び擾乱の複素角速度である．上式を支配方程式に代入し，適切な境界条件の下で解き，また流れ関数の擾乱部ψ_1には以下のようにChebyshev多項式を用いて展開する.

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(\zeta) \tag{30}$$

ここでT_nはn次のChebyshev多項式，ζは[-1, 1]区間で定義されるChebyshev多項式の変数である．上式を支配方程式に代入し，また式(31)のようなGauss-Labatte点を離散点として評価すると式(32)のような線形代数方程式系が得られる.

$$\zeta_i = \cos\left(j\pi / N\right), \quad (j=1, 2, ..., N\text{-}2) \tag{31}$$

$$\mathbf{L}a = \mathbf{M}R_1 \tag{32}$$

ここで**L**及び**M**は係数マトリックスであり，aは式(30)のChebyshev多項式の係数a_nおよび水深D_1ついての行列である（スペースの都合上，ここでは省略する）．式(32)は容易に解くことが出来，流れ関数の擾乱部ψ_1及び水深D_1はR_1のみを用いて表すことができる.

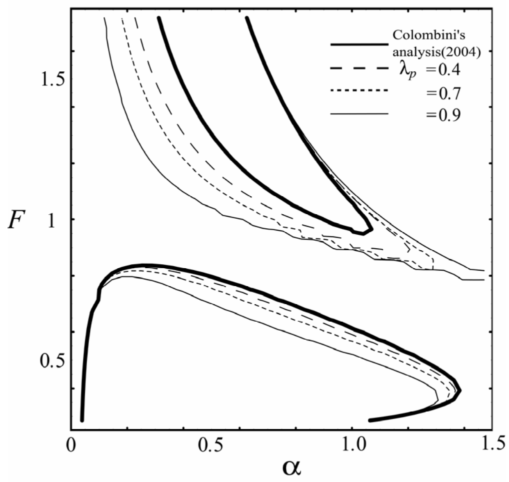

図-5　中立曲線図(C^{-1}=20, μ=0.1, m=2.5)

掃流砂についても同様に摂動展開を用いる.

$$\left(\Phi, \theta_b, \theta_q\right) = (\Phi_0, \theta_{b0}, \theta_{b0}) + A(\Phi_1, \theta_{b1}, \theta_{q1})\exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \tag{33}$$

上式を式(24)及び式(26)に代入し整理すると，

$$\Phi_1 = \left(\frac{12(\theta_{b0} - \theta_c)^{1/2} h_b}{h_b + 12i\alpha\beta(\theta_{b0} - \theta_c)^{1/2}\Phi_0}\right)\theta_{b1} \tag{34}$$

が得られる．上式を線形化した後，Exner 方程式(28)に代入すると以下のような一般関数形で表された複素波速 Ω を得る.

$$\Omega = f(\alpha, F; C, \mu, m) \tag{35}$$

この Ω の虚部が擾乱の成長率になっている.

図-5 は成長率の中立曲線を α-F 平面上に表したものである．太い実線は Colombini(2004)の解析結果であり，他の実線，点線および破線が今回の結果である.

Froude数が大きい箇所および小さい箇所にそれぞれ不安定な領域が出来ているが，それぞれアンチデューンが発生する領域およびデューンが発生する領域である．非平衡性掃流砂は式(24)および式(34)より λ_pが小さければそれほど影響はないが，λ_pが大きくなるにつれてその影響は大きくなることがわかる.

アンチデューン領域では，空隙率が大きくなるにつれて比較的小さい波数と Froude 数の箇所でより大きな拡大が見られ，一方デューン領域では比較的大きな波数と Froude 数の箇所で領域の縮小が見られた．またデューンが形成される限界 Froude 数がごくわずかに小さくなっている．これより掃流砂の非平衡性はデューン領域では平坦床への安定性を促進し，アンチデューン領域では逆に不安定性を促進するということがわかる.

6.　弱線形安定解析

臨界Froude数(F_c)近傍を考え，Froude数Fを次のように展開する.

$$F = F_c - \epsilon^2 F_c \tag{36}$$

表-1　弱非線形安定解析の結果(μ=0.1, m=1.7)

C^{-1}	λ_p	α	F_c	Ω	λ_0	λ_1
21	0.4	0.211	0.8271	13.9	15.497+ 57.5253i	-2158.25 + 69038.4i
21	0.4	0.221	0.8274	14.8	16.4791+ 61.2757i	-4295.82 + 70880.5i
21	0.4	0.231	0.827	15.4	17.1519+ 63.7735i	-6211.95 + 70699.6i
22	0.4	0.234	0.8584	45.1	60.7809+ 245.754i	19211.2+ 344721.i
22	0.4	0.244	0.8586	47.6	64.2331+ 261.036i	13558.1+ 352497i
22	0.4	0.254	0.8584	49.7	66.9999+ 273.481i	8287.26+ 354335.i
21	0.7	0.192	0.8103	8.76	8.78029+ 31.8221i	-2332.63 + 35658.3i
21	0.7	0.202	0.8107	9.36	9.40188+ 34.0787i	-3855.62 + 36800.2i
21	0.7	0.212	0.8102	9.77	9.79275+ 35.4053i	-5180.11 + 36545.9i
22	0.7	0.212	0.8435	28.6	33.8705+ 135.694i	2024.22 + 180394.i
22	0.7	0.222	0.8437	30.3	35.9291+ 144.615i	-2653.73 + 185206.i
22	0.7	0.232	0.8435	31.8	37.4989+ 151.462i	-6817.38 + 186050.i
21	0.9	0.161	0.7942	7.2	6.26276+ 23.5501i	-1761.76 + 24475.7i
21	0.9	0.171	0.7948	7.84	6.79051 + 25.5301i	-3307.62 + 25511.i
21	0.9	0.181	0.7943	8.26	7.1358+ 26.7376i	-4604.1 + 25415.
22	0.9	0.165	0.8175	18	16.7913 + 69.3938i	-3173.47 + 83238.8i
22	0.9	0.175	0.8179	19.5	18.0705+ 75.0677i	-7743.63 + 86564.1i
22	0.9	0.185	0.8176	20.5	18.9852 + 79.0954i	-11619.9 + 86966.3i

また多重尺度法を用いて，速い時間T_0と遅い時間T_1を導入する．そのとき次の関係が成り立つ．

$$(T_0, T_1) = (t, \varepsilon^2 t),\quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_1} \tag{37a, b}$$

これらに合わせて各変数を次のように展開する．

$$(\psi, D, R) = (\psi_0, 1, R_0) + \sum_{i=1}^{3} \epsilon^i (\psi_i, D_i, R_i) \tag{38}$$

上式を支配方程式に代入してϵのオーダーで整理する．基本擾乱として$O(\epsilon)$における解を次のような形で与える．

$$(\psi_1, D_1, R_1) = (\psi_{11}, D_{11}, R_{11}) \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \tag{39}$$

すると$O(\epsilon^2)$および$O(\epsilon^3)$についても同様の形を導入して各オーダーで整理する．線形解析と同様にChebyshev多項式展開を用いたスペクトルコロケーション法を用いて解く．ψ_{ij}を次のように展開する．

$$\psi_{ij} = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(i,j)} T_n(\zeta) \tag{40}$$

上式を各オーダーで整理した式に代入すると，一連の線形代数方程式系が得られる．$O(\epsilon^3)$のオーダーから得られる式からは，次式のようなLandau方程式が得られる．

$$\frac{dA}{dT_1} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \tag{41}$$

7.　あとがき

表-1 に線形解析により得られた臨界フルード数および弱非線形解析より得られたLandau定数を示す．表中1-3 行目にC^{-1}=21，λ_p=0.4 の場合について示した．表より臨界波数周辺ではいずれもλ_0>0 およびRe(λ_1)<0 となっているのがわかり，これはデューン-平坦床遷移が超臨界分岐であることを意味している．C^{-1}のみを 22 に増加させた場合の結果を表中 4-6 行目に示した．C^{-1}が大きくなると，臨界波数およびその周辺の波数領域においてλ_0>0 およびRe(λ_1)>0 となっており，デューン-平坦床遷移は亜臨界分岐となっている．ここまでは泉[2)]が行ったものと同じ結果になった．

次に非平衡性の影響を見るために，その影響を表す空隙率λ_pを変化させたものを表中の 7-18 行目に示した．ここでC^{-1}が 21 の場合（7-9 および 13-15 行目）で空隙率を上げてもデューン-平坦床遷移は一貫して超臨界分岐となっている．だがLandau定数の値が次第に大きくなっていることから，C^{-1}が 21 の場合では空隙率を上げると超臨界分岐が現れにくくなっていることがわかった．逆にC^{-1}が 22 の場合（10-12 および 16-18 行目），亜臨界分岐だったものが空隙率を上げていくと全て超臨界分岐になっており，Landau定数の値を見ると超臨界分岐が現れやすくなっていることがわかった．

【参考文献】

1)　M. Colombini: Revisiting the linear theory of sand dune formation，*J.Fluid Mech.* (2004), *vol*.502, pp. 1-16

2)　泉典洋:混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析，水工学論文集，第 51 巻，2007 年 3 月