平成19年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第64号

活発な浮遊砂を伴う河床デューンの線形安定解析

Linear stability analysis of dunes with active suspended load

北海道大学工学部土木工学科　学生会員　○中里遥介 (Yosuke Nakasato)
北海道大学大学院工学研究科　正会員　　泉典洋　(Norihiro Izumi)

1. はじめに

フルード数がある程度小さいとき, 水深の数割程度の波高を持つデューンと呼ばれる河床波が形成される. 特に流量が大きく変化する状況下では, 河床形態は複雑な挙動を示す. 流量が比較的小さいとき平坦床は不安定であり, 河床はデューンで覆われる. 流量がある量を上回るとデューンは消滅し, 平坦床かアンチデューンが現れる. デューンの形成により水位の上昇や河道抵抗の変化が起こるため, 河川工学上デューンの発生条件をより精確に知る必要がある.

泉[1)]は混合距離仮説およびChebyshev多項式展開に基づきスペクトル法を用い, 摂動方程式を解くと同時に弱非線形安定解析を行った. 本研究の目的は, このモデルのExner方程式に浮遊砂項を導入し線形安定解析を行い, より精度の高いモデルを構築することである.

2. 流れの方程式

流れの方程式は次の Reynolds 平均を取った二次元 Navier-Stokes 方程式である.

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+S^{-1}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標, U および V はそれぞれ x および y 方向の流速, S および P はそれぞれ平均河床勾配および圧力, T_{ij} $(i,j=x,y)$ はレイノルズ応力テンソルである. 流れの時間変化は河床形状の時間変化と比較して十分早く生じるので, 流れの方程式では非定常項を無視している.

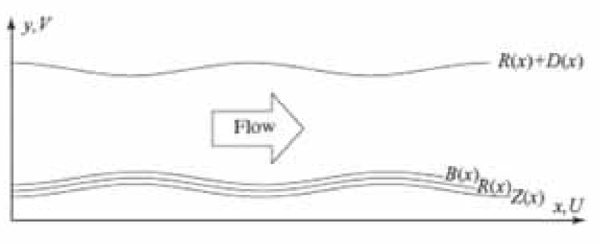

図-1 流れと座標系の概念図

また式(1)-(3)では次のような無次元化が行われている.

$$(U^*,V^*)=U_{f0}^*(U,V),\quad (x^*,y^*)=D_0^*(x,y) \quad (4a,b)$$

$$(P^*,T_{ij}^*)=\rho U_{f0}^{*2}(P,T_{ij}) \quad (4c)$$

ここで U_{f0}^* および D_0^* はそれぞれ平坦床基準状態における底面摩擦速度および水深, ρ は水の密度である.

混合距離仮説を用いるとレイノルズ応力テンソルは次のようになる.

$$T_{xx}=2\nu_T\frac{\partial U}{\partial x},\quad T_{yy}=2\nu_T\frac{\partial V}{\partial y},\quad T_{xy}=\nu_T\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\nu_T=l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|,\quad l=\kappa(y-Z)\left(\frac{D+R-y}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5a\text{-}e)$$

ここで ν_T は渦動粘性係数 $U_{f0}^*D_0^*$ で無次元化した渦動粘性係数, l および D, Z, R はそれぞれ D_0^* で無次元化した混合距離および水深, 底面高さ, 対数分布則で流速がゼロとなる高さ（以降, 基準面高さと呼ぶ. **図-1** 参照）であり, κ はカルマン定数(=0.4)である.

次のような流れ関数 ψ を導入する.

$$(U,V)=(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}) \qquad (6)$$

式(1)-(3)を書き直し，Pを消去すると次式が得られる．

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}-4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nu_T\frac{\partial\psi}{\partial x\partial y})$$
$$+(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2})\left[\nu_T(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2})\right]=0 \qquad (7)$$

水面および底面において境界条件の適用を容易にするために次のような変数変換を行う．

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{y-R(x)}{D(x)} \qquad (8)$$

この変数変換により境界条件を適用する水面および底面ではそれぞれ$\eta=1$，$\eta=0$となる．また無次元混合距離lは次のように表される．

$$l=\kappa D\left(\eta+\frac{R-Z}{D}\right)(1-\eta)^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

水面および底面における境界条件は次のようになる．

$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{ns}=0 \quad at \quad \eta=1$$
$$\vec{e}_{ns}\cdot T\cdot\vec{e}_{ns}=0 \quad at \quad \eta=1$$
$$\vec{e}_{ts}\cdot T\cdot\vec{e}_{ns}=0 \quad at \quad \eta=1 \qquad (10a\text{-}e)$$
$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{nb}=0 \quad at \quad \eta=0$$
$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{tb}=0 \quad at \quad \eta=0$$

ここで$\vec{U}$は流速ベクトル$(=(u,v))$，$\vec{e}_{ns}$および$\vec{e}_{ts}$は水面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトル，$\vec{e}_{nb}$および$\vec{e}_{tb}$は底面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトルである．またTは応力テンソルであり次式で表される．

$$T=\begin{bmatrix}-P+T_{xx} & T_{xy}\\ T_{xy} & -P+T_{yy}\end{bmatrix} \qquad (11)$$

3. 流れの基本解

安定解析の基本状態は平坦床等流状態である．基本状態では各変数は次のように表すことができる．

$$(U,V,D,Z,R)=(U_0(\eta),0,1,0,R_0) \qquad (12)$$

このとき流れの支配方程式は，次のように単純化される．

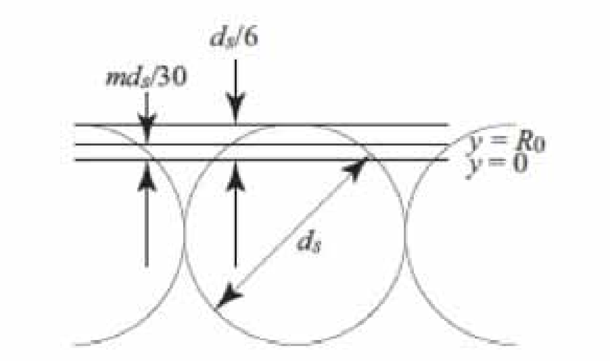

図-2 砂の粒径と原点および基準高さの関係

$$1+\frac{\partial T_{xy0}}{\partial\eta}=0,\quad T_{xy0}=\nu_{T0}\frac{dU_0}{d\eta} \qquad (13a,b)$$

$$\nu_{T0}=l_0^2\frac{dU_0}{d\eta},\quad l_0=\kappa(\eta+R_0)(1-\eta)^{1/2} \qquad (13c,d)$$

添字 0 で表されているのは基本状態における解を表している．境界条件は次のようになる．

$$U_0=0,\quad T_{xy0}=1 \quad at \quad \eta=0 \qquad (14)$$

式(13)および(14)より次の対数分布則が得られる．

$$U_0(\eta)=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\eta+R_0}{R_0}\right) \qquad (15)$$

ここでR_0の物理的大きさを考える．従来の開水路乱流の対数分布則を書き表すと次のようになる．

$$U=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{k_s}\right)+8.5=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{30y}{md_s}\right) \qquad (16)$$

ここでk_sおよびd_sはD_0^*で無次元化したそれぞれ粗度高さおよび河床材料の粒径，mはk/d_sである．上式より$y=md_s/30$のときU= 0 より，$R_0=md_s/30$となる．通常m= 1-3 の値をとるため，$R_0=d_s/30$-$d_s/10$程度となることがわかる．また対数分布則では，流速は原点近傍で急激に減少し負に発散してしまうため，y= 0 を粒子の最上点より$d_s/6$だけ下に取ることとする（**図-2** 参照）．

式(16) をη = 0 からη = 1 まで積分すると次の抵抗係数C_rが得られる．

$$C_r^{-1}=\frac{U_{a0}^*}{U_{f0}^*}=\frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(\frac{1+R_0}{R_0}\right)-1\right] \qquad (17)$$

ここでU_{a0}^*は基本状態における水深平均流速である．

4. 掃流砂の輸送

掃流砂量式としては河床の局所勾配の影響を取り入れた次の Meyer-Peter & Müller 式を用いる.

$$\Phi = \frac{q_B^*}{\sqrt{R_s g d_s^*}\,d_s^*} = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \tag{18}$$

ここでΦおよびR_s, q_B^*, d_s^*はそれぞれ無次元掃流砂量，水中比重(= 1.65)，掃流砂量，粒径であり，掃流層上面($\eta = \eta_B$)におけるシールズ数θ_bおよび限界シールズ数θ_cは次のように表される.

$$\theta_b = \frac{S}{R_s d_s}\tau_b, \quad \theta_c = \theta_{ch} - \mu\left(S - \frac{\partial B}{\partial x}\right) \tag{19}$$

ここでBは掃流層上面の高さ， τ_bは掃流層上面での無次元剪断力， θ_{ch}は平坦床における限界無次元掃流力(= 0.047)， μは河床勾配の効果を表すパラメータである.

4. 浮遊砂の輸送

浮遊砂の移流拡散方程式は次のように表される.

$$U\frac{\partial C}{\partial x} + (V - v_s)\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial y}\right) \tag{20}$$

ここでCは浮遊砂濃度であり，浮遊砂の沈降速度v_sは Rubey の実験式より次のように表される.

$$v_s = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{R_s g d_s^{*3}}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{R_s g d_s^{*3}}} \tag{21}$$

ここでνは動粘性係数(= 1.0×10^{-6}) である. また式(20) は流れの支配方程式と同様, 非定常項を無視していることに注意する．境界条件は次の二つである.

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_{ns} = 0, \quad \vec{F}\cdot\vec{e}_{nb} = \frac{E_s^*}{U_{f0}^*} \tag{22a,b}$$

ここで$\vec{F}$は無次元浮遊砂フラックスベクトル，E_s^*は底面からの浮遊砂巻上速度である.

浮遊砂濃度の基本解を求める．流れの基本解同様，平坦床等流状態では各変数は次のようになる.

$$(C, U, V, D, Z, R) = (C_0(\eta), U_0, 0, 1, 0, R_0) \tag{23}$$

このとき式(20) は次のようになる.

$$-v_s\frac{\partial C_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu_{T0}\frac{\partial C_0}{\partial \eta}\right) \tag{24}$$

適当な境界条件を与えると, 平坦床等流状態の浮遊砂濃度は次のような Rouse 分布となる.

$$C_0(\eta) = c_b\left[\frac{R_0(1-\eta)}{\eta + R_0}\right]^{v_s/\kappa(1+R_0)} \tag{25}$$

ここでc_bは底面近傍における浮遊砂濃度である.

5. Exner 方程式

河床形状の時間変化は, 浮遊砂を考慮した Exner 方程式で次のように表される.

$$(1-\lambda_p)\frac{\partial B^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q_B^*}{\partial x^*} + E_s^* - D_p^* = 0 \tag{26}$$

ここでλ_pは空隙率, E_s^*およびD_p^*はそれぞれ浮遊砂の巻上速度および沈降速度であり，次のように表される.

$$E_s^* = v_s^* E_s, \quad D_p^* = v_s^* C(0) \tag{27,28}$$

式(27)および(28)を代入し無次元化を行うと，式(26) は以下のようになる.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{d_s}{v_s}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - E_s + C(0) \tag{29}$$

ここで巻上速度E_sは Garcia and Parker にならって次のように表されるものとする.

$$E_s = \frac{AZ_u^5}{1 + AZ_u^5/0.3}, \; Z_u = \frac{U_{f0}^*}{v_s^*}R_p^n, \; R_p = \frac{\sqrt{Rgd_s^*}\,d_s^*}{\nu} \tag{30}$$

ここでAおよびnは実験から得られる定数であり，それぞれ 1.0×10^{-7}および 0.6 である.

6. 線形安定解析

次のような摂動展開を行う.

$$(\psi, P, D, Z, R, B, C) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0, C_0) + \varepsilon(\psi_1, P_1, D_1, R_1, R_1, R_1, C_1)\exp\left[i(\alpha\xi - \Omega t)\right] \tag{31}$$

ここでεおよびα, Ωはそれぞれ摂動の振幅および波数, 複素角周波数である.

ψ_1およびC_1は Chebyshev 多項式展開を用いて次のよう

に表す.

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(\zeta), \quad C_1 = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(\zeta) \qquad \text{(32a,b)}$$

ここで T_n は n 次の Chebyshev 多項式, ζは[-1,1]で定義される Chebyshev 多項式の独立変数である．これらを式(7)および(20)にそれぞれ代入した後, 次の Gauss-Labatte 点において式を評価する.

$$\zeta_j = \cos(j\pi / N) \qquad (33)$$

それを適当な境界条件と合わせると, 線形代数方程式が得られる．線形代数方程式の解を求めることで a_n および b_n が求まり，最終的に複素角周波数Ωが次のような関数系で求められる.

$$\Omega = f(\alpha, Fr, C_r, D_0^*, \mu, m) \qquad (34)$$

ここで求められた，Ωの虚部が摂動の増幅率に相当する.

図-3 に $\alpha - Fr$ 平面上における増幅率 $\mathrm{Im}[\Omega]$ の中立曲線図 $(\mathrm{Im}[\Omega]=0)$ を示す．ただしいずれも μ= 0.1，m= 2.5，D_0^*= 1.0 [m]としている．**図-3**(a)の太線が浮遊項を導入して行った線形安定解析による結果であり，細線は泉[1]による掃流砂のみを考慮した既存のモデルである. フルード数の小さい領域（デューン）と大きい領域（アンチデューン）に摂動の増幅率が正となる領域，すなわち河床が不安定となる領域が現れている．**図-3**(b)は抵抗係数 C_r の変化による比較図であり，C_r^{-1} の値を 20, 22, 24 とした場合を，それぞれ太線，細線，破線で表している.

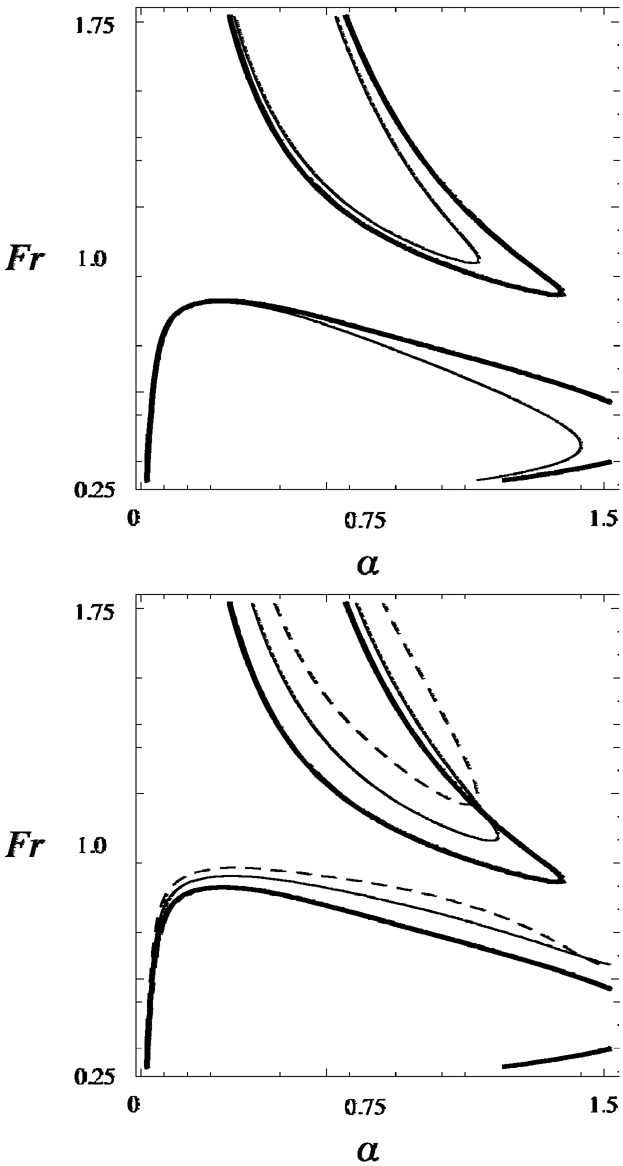

図-3 (a) 既存のモデルとの比較，C_r^{-1} = 20　(b) 抵抗係数の違いによる比較

7. おわりに

Exner 方程式に浮遊砂項を導入にすることにより，デューンの発生領域は拡大した．また C_r^{-1} の増加により R_0 および d_s，v_s が小さくなるので，浮遊砂はより活発なると考えられる. すなわち浮遊砂がより活発になるにしたがい, デューンの発生領域は徐々に拡大している. 一方アンチデューンの場合, 浮遊項の導入により発生領域は一時的に拡大しているが, 浮遊砂がより活発になるにしたがい，発生領域は縮小していることが図より分かる.

参考文献

1) 泉　典洋: 混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析，土木学会論文集，第 51 巻, 2007

2) 泉　典洋，山口里美: 浮遊砂を伴うデューン-平坦床遷移過程，土木学会論文集, No.796/Ⅱ-72, pp.53-67, 2005

3) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *J. Fluid Mech*. (2004), Vol. 502, pp. 1-16.

4) 山口里美, 泉　典洋: デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象，土木学会論文集，No.740/Ⅱ-64, pp.75-96, 2003