

粒子法を用いた雪崩の数値計算

Numerical calculation of snow avalanche by Particle Method

北海道大学大学院 工学研究科 学生員 大塚達也 (Tatsuya Otsuka)
北海道大学大学院 工学研究科教授 正会員 清水康行 (Yasuyuki Shimizu)

1. はじめに

雪崩災害の防止・軽減のため雪崩の挙動を予測することは工学上重要な課題である。近年では雪崩の流動を再現する様々なモデルの研究が進められている。いくつかある流動モデルの中でも、粒子流モデルは雪粒子が流動しているという雪崩の最も重要な特徴を捉えたモデルである。このモデルは流速、走路の他に雪崩の形状やデブリの形状がわかるという長所を持っている。今後、このモデルが確立すれば雪崩減勢工の効果などを数値計算により評価することが期待できる。

粒子流モデルである離散要素法(DEM)を用いた雪崩の数値計算は中西ら¹⁾によって行われているが、MPS(Moving Particle Semi-implicit)法²⁾を用いた雪崩の数値計算例はあまりない。斎藤ら³⁾がMPS法による雪崩の再現を試みているが、実際の雪崩は塊となって流下すると一般的に考えられており、斎藤らの計算結果では塊としては流下しておらず、改善の余地がある。

そこで本研究ではMPS法を用いて雪崩の形状を再現するために運動方程式に空気抵抗項を組み込むことによってシミュレーションし、空気抵抗の影響について考察した。

2. 計算手法

2.1 粒子法(MPS法)について

粒子法は完全Lagrange的手法である。連続体を有限個の粒子で表し、各粒子は圧力などの変数を保持して移動する⁴⁾。そのため、差分法や有限要素法のような格子は使用しない。粒子法には離散要素法(DEM)、SPH法(Smoothed Particle Hydrodynamics)、MPS法などがあるが、MPS法はDEMのような粉体を構成する粒子をそのまま粒子として計算する方法ではなく、連続体の支配方程式を勾配や発散といった微分演算子に対応する粒子間相互作用モデルによって離散化する手法である⁴⁾。

2.2 基礎式

雪崩を流体と仮定し、連続式を式(1)に、運動方程式を式(2)にそれぞれ示す。

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 u + \rho g - F_{air} \quad (2)$$

ここで、 ρ ：粒子の密度、 u ：速度、 P ：圧力、 ν ：動粘性係数、 g ：重力加速度、 F_{air} ：空気抵抗を表している。

空気抵抗 F_{air} を式(3)に示す。

$$F_{air} = \frac{1}{2} \rho_a C_D S u |u| \quad (3)$$

ここに、 ρ_a ：空気の密度、 C_D ：抵抗係数、 S ：投影面積を表している。

また、抵抗係数 C_D はレイノルズ数 Re の値により変化する Schiller and Naumann の式を用いる。

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) & Re \leq 1000 \\ 0.4 & Re > 1000 \end{cases} \quad (4)$$

2.3 MPS法による非圧縮性流れの計算アルゴリズム

ここでは、MPS法による非圧縮性流れの計算アルゴリズムの概要を示す。

MPS法では、非圧縮性流れの計算アルゴリズムとして、半陰解的アルゴリズムを用いる。まず、陽的なステップで式(2)の圧力勾配項以外の項を計算し、粒子の仮の速度 u^* 及び位置 r^* を以下の式より得る。

$$u^* = u^k + \Delta t \left[\nu \nabla^2 u^k + g - \frac{1}{\rho} F_{air} \right] \quad (5)$$

$$r^* = r^k + \Delta t u^* \quad (6)$$

(k ：時間ステップ)

粘性項のラプラシアンは、以下に示す、MPS法による粒子間相互作用モデルを使用する。

$$\langle \nabla^2 u \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} [(u_j - u_i) \omega(|r_j - r_i|)] \quad (7)$$

(i, j ：粒子番号)

ここに、 d ：空間の次元、 n^0 ：粒子数密度の一定値、 λ ：分布の統計的な分散の増加と解析解を一致させるための係数、 $\omega(\cdot)$ ：重み関数を表している。

ここで、重み関数 $\omega(\cdot)$ 、係数 λ が導入されているがそれぞれ以下のように表される。

$$\omega(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r_e} & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r \leq r_e \end{cases} \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i \neq j} |r_j - r_i|^2 \omega(|r_j - r_i|)}{\sum_{i \neq j} \omega(|r_j - r_i|)} \quad (9)$$

$$n_i = \sum_{i \neq j} \omega(|r_j - r_i|) \quad (10)$$

式(10)のMPS法固有の粒子数密度 n_i は字のごとく粒子数の密度であるが、各粒子が保持する質量が一定であるとする、粒子数密度 n_i と密度は比例関係にあることがいえる。したがって、式(1)の密度一定の条件より、粒子数密度 n_i も一定でなければならない。この条件から式(7)に示す n^0 は粒子数密度 n_i の一定値を示す。

陽的に仮の速度 u^* 、位置 r^* の計算が終了した後、陰的な圧力勾配項により速度の修正量 u' が生じるとすると u' は、

$$u' = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla P^{k+1} \quad (11)$$

で示される。また、速度 u' の修正量と粒子数密度 n' の修正量は式(1)より

$$\frac{n'}{n^0 \Delta t} + \nabla u' = 0 \quad (12)$$

の関係がある。

以上より式(11)～(12)から、圧力のポアソン方程式

$$\nabla^2 P^{k+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n^* - n^0}{n^0} \quad (13)$$

が得られる。ただし、 n^* は陽的な段階が終了した時点での粒子数密度である。

式(13)に式(7)の粒子間相互作用モデル(ラプラシアン)を用いて同様に離散化すると、連立一次方程式が得られ、これを解くことにより圧力 P^{k+1} が求まる。また、求まった圧力 P^{k+1} より式(11)から、速度の修正量 u' と位置の修正量 r' が得られる。

$$u^{k+1} = u^* + u' \quad (14)$$

$$r^{k+1} = r^* + u' \Delta t \quad (15)$$

以上の計算をタイムステップごとに繰り返し、計算を進める。

以上がMPS法の非圧縮性流れのアルゴリズムである。

3. 計算条件

雪崩がニュートン流体と仮定した上で、式(2)の中の動粘性係数を、 $\nu = 1.0 \times 10^{-4}$ とした⁵⁾。また、雪崩の密度は雪崩形状が密度の高い流れ型雪崩であると仮定し、 300 kg/m^3 とした。

陽的な計算が終了した時点で、 $n^* < 0.97n^0$ を満たす粒子を自由表面上に存在すると判定し⁴⁾、式(2)、(3)の空

気抵抗 F_{air} は自由表面上の粒子に働くとした(図-1)。

MPS法では、壁などについても粒子として粒子数密度 n を計算する必要があるため、流体及び構造物を粒子の配列によって表す必要がある。そこで、粒子の平均間隔 $r_0=0.2\text{m}$ で積雪及び地形を表現した。

計算負荷を少なくするため図-2に示すような鉛直二次元の斜面で計算を行った。斜面の傾斜角は雪崩の発生頻度が高い 40° とした。

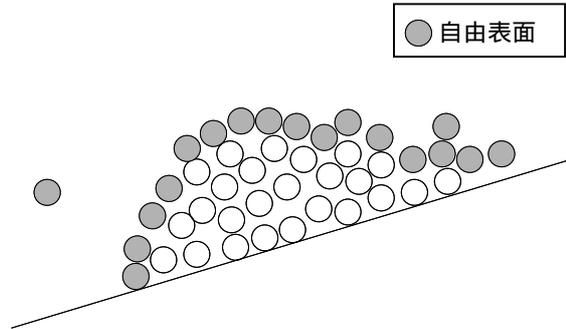


図-1 空気抵抗の影響を受ける粒子

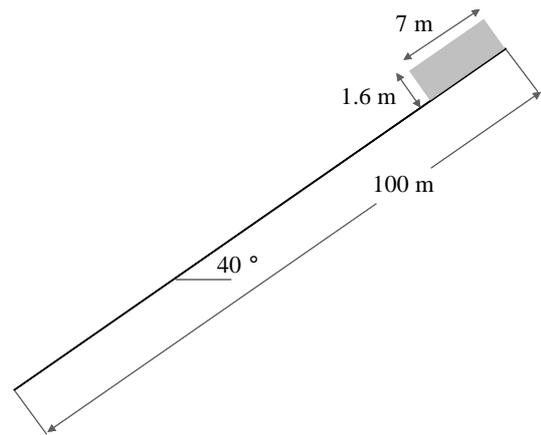


図-2 斜面の概要

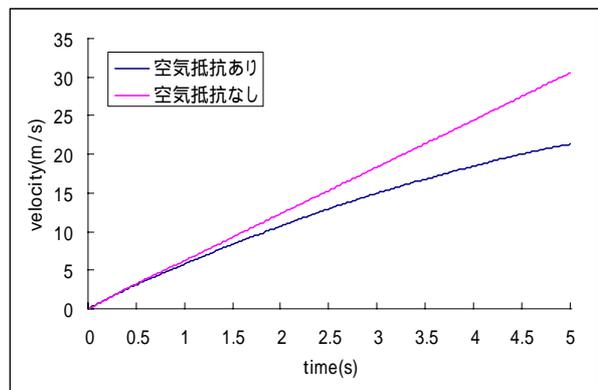


図-3 空気抵抗の有無による平均速度

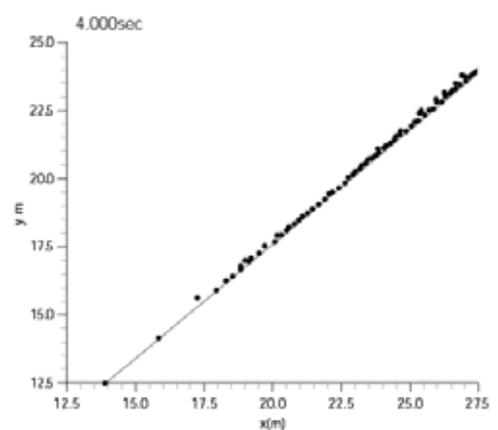
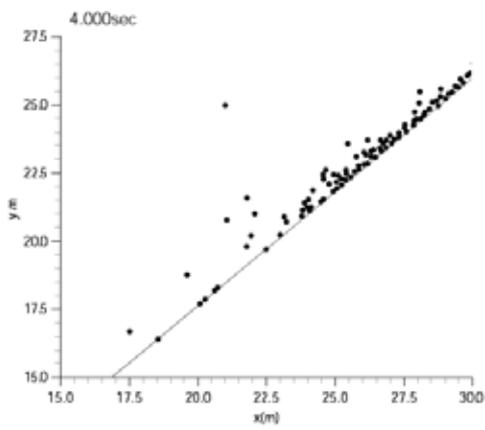
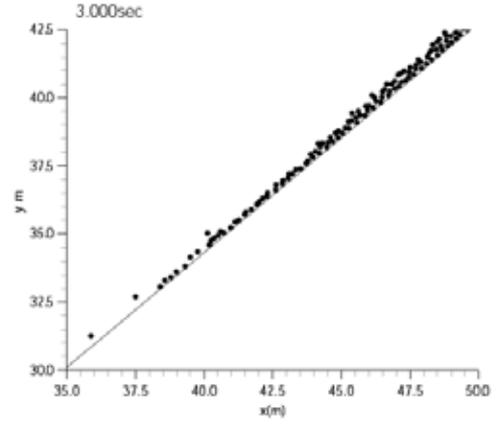
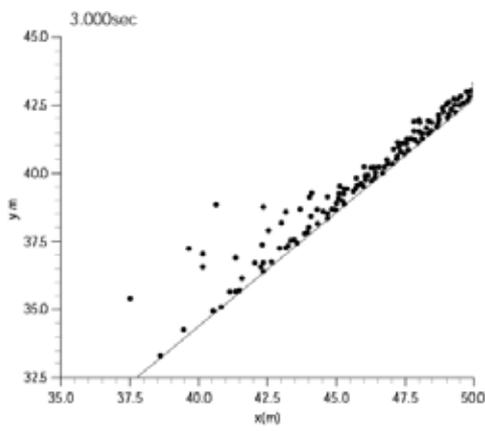
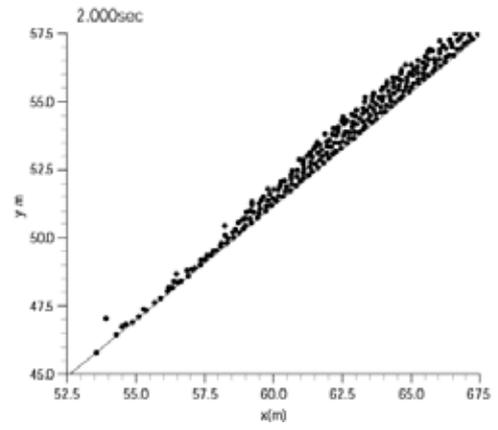
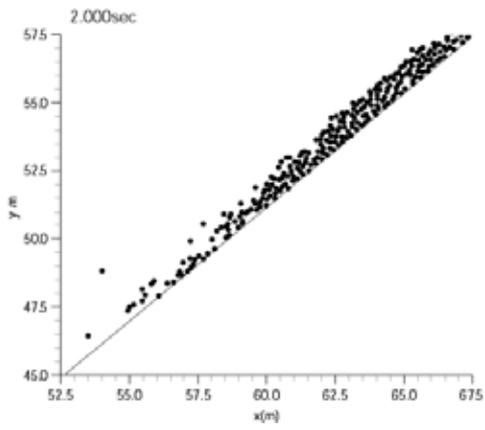
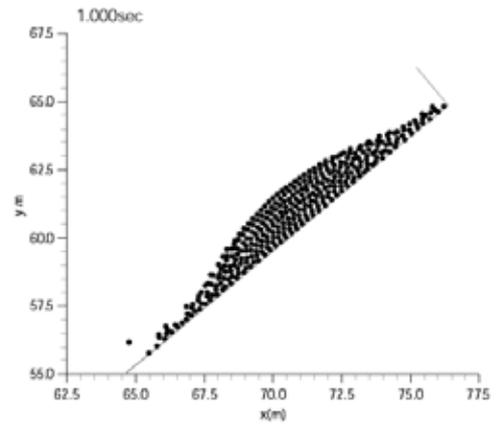
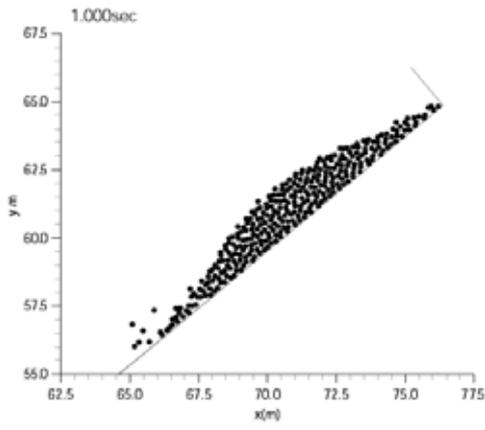


図-4 時間経過ごとに見た空気抵抗を考慮した場合の雪崩先端の様子

図-5 時間経過ごとに見た空気抵抗を考慮しない場合の雪崩先端の様子

4. 計算結果

図-3 に空気抵抗の有無による雪崩速度の比較を示す。また、図中縦軸の平均速度とは式(16)より求めたものである。

$$\bar{v} = \frac{\sum v_i}{N} \quad (16)$$

ここに、 \bar{v} ：平均速度、 v_i ：各雪崩粒子の合成速度、 N ：雪崩粒子の総数。

空気抵抗項なしの方は重力の斜面方向成分の力によりほぼ直線的に速度が増加しているのに対して、空気抵抗項ありの方は速度の二乗に比例する抗力を受け5秒後には空気抵抗項なしより約10m/s速度が小さいことがわかる。

図-4、図-5は1秒後から4秒後まで1秒ごとの雪崩先端の様子を示したものである。図-4は式(2)のとおり空気抵抗項を考慮した場合、図-5は同式で空気抵抗項のみを考慮しない場合である。時間が経過し速度が大きくなるにつれ空気抵抗項を考慮した場合の方が、雪崩粒子が散っているのが見てとれる。雪崩先端部の乱れは空気抵抗の影響を受けた粒子により引き起こされ、その乱れにより連続体として運動するに十分な粒子数密度が得られなかったことが原因だと考えられる。

5. まとめ

本研究では、MPS法による空気抵抗を考慮した雪崩の数値計算を試みた。本研究で得られた結果を以下に列挙する。

- 1) 斜面長100m、傾斜角40度の斜面を考えた場合、空気抵抗項の有無で最大約10m/sの速度差があることがわかった。
- 2) 空気抵抗項の有無で雪崩先端部の粒子の挙動に違いがあることが確認できた。
- 3) すべての自由表面に空気抵抗が作用するとしたが、この方法でも十分空気抵抗の効果を得ることができた。

なお、本研究では乱流抵抗、底面摩擦抵抗などは考慮していない。今後モデルの発展のためにはそれらの抵抗を考慮するとともに、雪崩による雪の取り込みや堆積といった機構も組み込んでいく必要があると考える。

参考文献

- 1) 中西宏：DEMによる雪崩シミュレーション法，混相粒 Vol.16, No.4, pp.339-345, 2002.
- 2) Koshizuka, S. and Oka, Y.：Moving-Particle Semi-implicit Method For Fragmentation of Incompressible Fluid, Nucl. Sci. Eng., 123, pp.421-434, 1996
- 3) 斎藤佳彦，大槻政哉，植松考彦：粒子法を用いた雪崩シミュレーションの試み，寒地技術論文・報告集，Vol.21, pp.772-775, 2005.
- 4) 越塚誠一：計算レクチャーシリーズ5 粒子法，日本計算学会編，丸善株式会社。
- 5) 前野紀一，福田正己：雪崩と吹雪，基礎雪氷学講座，古今書院。