Ｂ－４６　平成18年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第63号

分布定数系流出モデルの集中化手法に関する考察

Lumping method of distributed parameter runoff models

(財)日本気象協会北海道支社　○正　員　臼谷友秀(Tomohide Usutani)
(財)日本気象協会北海道支社　フェロー　藤田睦博(Mutsuhiro Fujita)
(財)日本気象協会北海道支社　小倉　勉(Tsutomu Ogura)
(財)日本気象協会北海道支社　奈良　慶(Kei Nara)
(財)日本気象協会釧路支店　須藤哲寛(Norihiro Sudo)
(財)日本気象協会旭川支店　河見博文(Hirofumi Kawami)

1. はじめに

これまで分布定数系流出モデルを集中化して数多くの集中定数系のモデルが発表されている．採用されている集中化手法を大別すると以下のようになる．

集中化手法 $\begin{cases} \text{(1) 基礎式の空間平均}^{1)} \\ \text{(2) 等価周波数伝達関数の導入} \end{cases}$

(1)の手法は,多くの研究者によって採用されて手法である．(2)は最近藤田らによって提案された手法である[2)]．ここでは，(1)，(2)の手法を kinematic wave 式を介して比較，検討する．

2. 基礎式

図－1 に示す任意の河道網流域における i 番目の部分流域に着目し斜面域，河道域ともに kinematic wave 式で記述できるものとする．

斜面域

$$\frac{\partial h_{i,\delta}}{\partial t}+\frac{\partial q_{s,i,\delta}}{\partial x}=r(t) \qquad 0\le x\le l_{s,i,\delta} \tag{1}$$

$$q_{s,i,\delta}=\alpha_{i,\delta}h_{i,\delta}^{p_s} \tag{2}$$

$$\begin{cases} h_{i,\delta}(t,0)=h_{i,\delta}(0,x)=0 \\ q_{s,i,\delta}(t,0)=q_{s,i,\delta}(0,x)=0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\alpha_{i,\delta}=\frac{\sqrt{\sin(\theta_{s,i,\delta})}}{n_{s,i,\delta}} \tag{4}$$

$$\delta=1,2$$

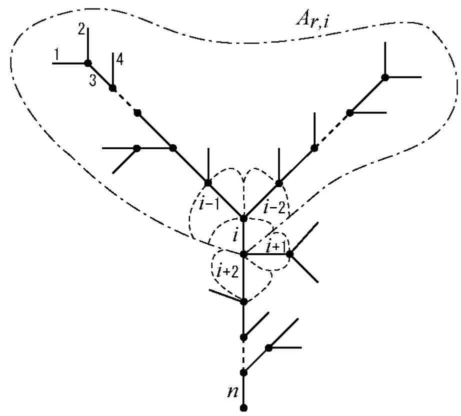
$h_{i,\delta}$ ：水深　$q_{s,i,\delta}$ ：単位幅流量　$l_{c,i,\delta}$ ：斜面長　$\theta_{s,i,\delta}$ ：傾斜角　$n_{s,i,\delta}$ ：等価粗度係数　p_s ：定数　$\delta=1,2$ は左右岸斜面を表している．

河道域

$$\frac{\partial a_i}{\partial t}+\frac{\partial q_{c,i}}{\partial y}=\sum_{\delta=1}^{2}q_{s,i,\delta}(t,l_{s,i,\delta}) \qquad 0\le y\le l_{c,i} \tag{5}$$

$$q_{c,i}=\beta_i q_{c,i}^{p_c} \tag{6}$$

$$q_{c,i}(t,0)=\begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ q_{c,i}(t,l_{c,i-1})+q_{c,i-2}(t,l_{c,i-2}) & \\ & \text{(内部リンク)} \end{cases} \tag{7}$$



図－1　任意の河道網流域

$$\beta_i=\frac{\sqrt{\sin(\theta_{c,i})}}{n_{c,i}W_i^{2/3}} \tag{8}$$

a_i ：流積　$q_{c,i}$ ：河道流量　$l_{c,i}$ ：河道長　$n_{c,i}$ ：粗度係数　W_i ：河道幅　p_c ：定数

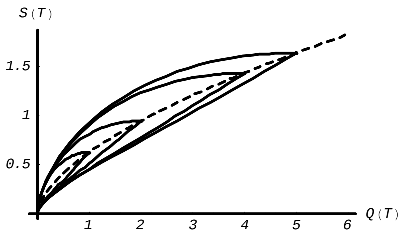
式(8)では,河道幅 W_i の長方形断面水路を想定している．また，式(1)～(4)，式(5)～(8)における添え字の s,c は slope と channel を意味している．斜面域，河道域ともに Manning 則を適用する．

$$p_s=p_c=\frac{5}{3} \tag{9}$$

いま，式(1)～(8)を用いて，図－1 の河道末端からの流出量 $q_{c,n}(t,l_{c,n})$ を求めようとすると，式(1)～(8)に与えるべきパラメータの数は, $10n$ 個となる.本論文では,式(1)～(8)を対象に求めた集中定数系の流出モデルに含まれるパラメータが，上述の $10n$ 個のパラメータより計算できる集中化手法について検討するものである．降雨量と流出量の実測資料に基づいて集中定数系のモデルパラメータを推定する手法と異なっている．

3. 基礎式の空間平均による集中化

実用的な観点からは，斜面域の支配方程式(1)，(2)および河道域の支配方程式(5)，(6)を集中化した結果が必要であるが，本論文では斜面域における基礎方程式の集中化手法に限定して記述する．紙面の制約条件と集中化手法の相違点を理解するには斜面域の集中化で十分であ



図－2　矩形降雨の $S_{x,i,\delta} \sim Q_{s,i,\delta}$ 関係

ると考えたからである．

計算および記述を容易にするために基礎式を無次元化する．いま，＊の付いた量を無次元化基準量として，式(10)を考える．大文字の量は，小文字の量に対応する無次元量である．

$$\begin{cases} t = t_* T \quad x = x_* X \quad h_{i,\delta} = h_{i,\delta *} H_{i,\delta} \\ q_{s,i,\delta} = q_{s,i,\delta *} Q_{s,i,\delta} \quad r = r_* R \end{cases} \tag{10}$$

無次元化基準量として式(11)を与える．

$$\begin{cases} x_* = l_{s,i,\delta} \quad r_* = \overline{r} \quad q_{s,i,\delta,*} = \overline{r} l_{s,i,\delta} \\ h_{i,\delta,*} = \left\{ \dfrac{\overline{r} l_{s,i,\delta}}{\alpha_{i,\delta}} \right\}^{1/p_s} \quad t_* = \left\{ \dfrac{(\overline{r})^{1-p_s} l_{s,i,\delta}}{\alpha_{i,\delta}} \right\}^{1/p_s} \end{cases} \tag{11}$$

式(10)，(11)を用いて，無次元基礎式として式(12)～(14)を誘導できる．

$$\frac{\partial H_{i,\delta}}{\partial T} + \frac{\partial Q_{s,i,\delta}}{\partial X} = R \quad 0 \le X \le 1 \tag{12}$$

$$Q_{s,i,\delta} = H_{i,\delta}^{p_s} \tag{13}$$

$$\begin{cases} H_{i,\delta}(T,0) = H_{i,\delta}(0,X) = 0 \\ Q(T,0) = Q_{s,i,\delta}(0,X) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

式(12)の両辺を区間[0,1]の範囲で X に関して積分し，式(15)を得る．

$$\frac{dS_{s,i,\delta}}{dT} + Q_{s,i,\delta}(T,1) = R \tag{15}$$

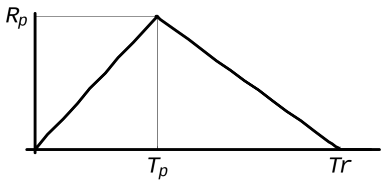
$$S_{s,i,\delta}(T) = \int_0^1 H_{i,\delta}(T,X) dX \tag{16}$$

式(16)の $S_{s,i,\delta}$ は無次元単位幅貯留量を表している．式(15)の $Q_{s,i,\delta}(T,1)$ は，斜面末端における無次元単位幅流量で，斜面流出量になっているので以後 $Q_{s,i,\delta}(T)$ と記述する．

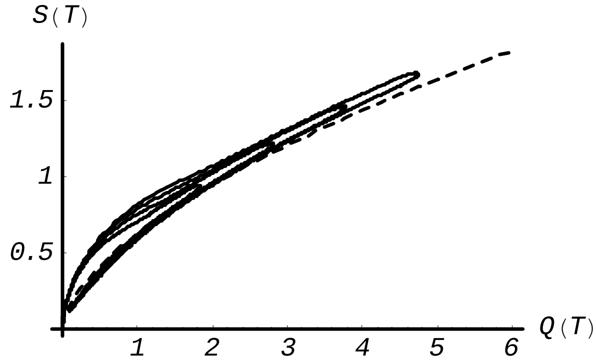
$S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ 関係を与えると，式(15)より $Q_{s,i,\delta}$ を計算できる．$S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ 関係は貯留関数なので，基礎方程式の空間平均手法によって集中化された集中定数系のモデルは貯留関数法に帰着することがわかる．$S_{s,i,\delta}$ は，式(17)より計算できる．

$$S_{s,i,\delta}(T) = \int_0^T \left\{ R - Q_{s,i,\delta}(\tau) \right\} d\tau \tag{17}$$

式(18)は，矩形降雨波形を対象に $S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ 関係を誘導した結果を示している．



図－3　三角形降雨



図－4　三角形降雨の $S_{s,i,\delta} \sim Q_{s,i,\delta}$ 関係

$$S_{s,i,\delta} = \begin{cases} Q_{s,i,\delta}^{1/p_s} - \dfrac{1}{(1+p_s)R_0} Q_{s,i,\delta}^{(1+p_s)/p_s} \\ \qquad \text{(ハイドログラフの上昇期)} \\ \dfrac{(p_s - 1)}{p_s} Q_{s,i,\delta}^{1/p_s} + \dfrac{1}{p_s(1+p_s)R_0} Q_{s,i,\delta}^{(1+p_s)/p_s} \\ \qquad \text{(ハイドログラフの下降期)} \\ 0 \le Q_{s,i,\delta} \le R_0 \end{cases} \tag{18}$$

図－2 は，矩形降雨の無次元降雨強度を $R_0 = 1,2,4,5$ としたときの $S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ 関係を表している．図－2 の破線は，式(19)を示している．

$$S_{s,i,\delta} = \frac{p_s}{1+p_s} Q_{s,i,\delta}^{1/p_s} \tag{19}$$

この式は，式(18)において最大流量時における貯留量を連ねた線になっている．

式(19)は矩形降雨を対象にして求めたので任意の降雨形への適合性を検討しておく必要がある．ここでは図－3 に示す三角形降雨波形を用いて $S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ を求める．図－4 は，式(20)の値を用いて計算した $S_{s,i,\delta}$～$Q_{s,i,\delta}$ 関係を示している．

$$R_p = 2,3,4,5 \quad T_p = 2 \quad T_r = 5 \tag{20}$$

図－4 の破線は式（19）を示している．三角形降雨波形であっても式(19)が成立していることがわかる．式(19)を次元のある貯留方程式に変換すると式(21)を得る．

$$s_{h,s,i,\delta} = \frac{p_s}{1+p_s} \left\{ \frac{l_{s,i,\delta}}{\alpha_{i,\delta}} \right\}^{1/p_s} 1000^{(p_s-1)/p_s} q_{h,s,i,\delta}^{1/p_s} \tag{21}$$

$s_{h,s,i,\delta}$：貯留高(mm)　$q_{h,s,i,\delta}$：流出高(mm/hr)

4. 等価周波数伝達関数を用いた集中化

4.1 斜面域における等価周波数伝達関数の誘導

式(22)～(24)を考える．

$$r(t)=\bar{r}+Be^{j\omega t} \tag{22}$$

$$q_{s,i,\delta}(t,x)=\bar{q}_{s,i,\delta}(x)+C_{s,i,\delta}(x)e^{j\omega t} \tag{23}$$

$$h_{i,\delta}(t,x)=\bar{h}_{i,\delta}(x)+D_{s,i,\delta}(x)e^{j\omega t} \tag{24}$$

j：虚数単位　　ω：周波数

$\bar{r},B$は，平均降雨量および定数である．また，$\bar{q}_{s,i,\delta}(x),\bar{h}_{i,\delta}(x)$は定常状態における単位幅流量，水深を表している．$C_{s,i,\delta}(x),D_{s,i,\delta}(x)$は，未知の複素数である．式(23)～(24)を式(1),(2)に代入して式(25)～(26)を得る．

$$\bar{q}_{s,i,\delta}=\bar{r}x \tag{25}$$

$$\frac{dC_{s,i,\delta}}{dx}+\frac{j\omega}{p_s}\left\{\frac{(\bar{r}x)^{1-p_s}}{\alpha_{i,\delta}}\right\}^{1/p_s}C_{s,i,\delta}=B \tag{26}$$

$$C_{s,i,\delta}(0)=0 \tag{27}$$

$r(t)$～$q_{s,i,\delta}(t,l_{s,i,\delta})/l_{s,i,\delta}$間の等価周波数伝達関数$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$は，次式によって定義される．

$$Z_{s,i,\delta}(j\omega)=\frac{C_{s,i,\delta}(l_{s,i,\delta})}{Bl_{s,i,\delta}} \tag{28}$$

したがって，式(26)～(28)より次式を誘導できる．

$$Z_{s,i,\delta}(j\omega)=e^{-j\omega t_{s,i,\delta}}\,{}_1F_1[p_s,1+p_s,j\omega t_{s,i,\delta}] \tag{29}$$

$$t_{s,i,\delta}=\left\{\frac{(\bar{r})^{1-p_s}l_{s,i,\delta}}{\alpha_{i,\delta}}\right\}^{1/p_s} \tag{30}$$

$${}_1F_1[a,b,c]=1+\frac{ac}{b}+\frac{a(a+1)c^2}{2!b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)c^3}{3!b(b+1)(b+2)}+ \tag{31}$$

式(29)の$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$のパラメータは式(30)の$t_{s,i,\delta}$である．これは，平均降雨量$\bar{r}$の斜面における到達時間になっている．

4.2 遅れ系の導入

斜面域においては，$r(t)$～$q_{s,i,\delta}(t,l_{s,i,\delta})/l_{s,i,\delta}$間の等価周波数伝達関数$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$を誘導することができた．この等価数端数伝達関数を直接用いて流出計算をしようとすると次式を用いることになる．

$$q_i(t)=\int_0^\infty r(\tau)z_{s,i,\delta}(t-\tau)d\tau \tag{32}$$

$$Q_i(j\omega)=R(j\omega)Z_{s,i,\delta}(j\omega) \tag{33}$$

式(32)の$z_{s,i,\delta}(t)$は，$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$のインパルス応答関数である．また，式(33)の$Q_i(j\omega),R(j\omega)$は，$q_i(t),r(t)$のフーリエ変換関数である．$Q_i(j\omega)$をフーリエ逆変換することによって$q_i(t)$を計算できる．式(32),(33)は表現形式が異なっているものの,本質的には同一の式である．式(32),(33)は，式(1),(2)を集中化しているが，これらの式を用いて流出計算をするのでは等価周波数伝達関数を求めた利点がない．

図－5 の実線は，式(45)の値を式(29)に適用した$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$の周波数特性を示している．(A)は，ベクトル軌跡を表し，$R_e[Z],I_m[Z]$は，$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$の実部，虚部を示す．(B),(C)は，それぞれゲインと時間遅れを表している．$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$は物理系の一つである流出系の等価周波数伝達関数なので，その周波数特性は図－5 に示すように低域フィルターの特性を有している．一方，式(34),(35)に示す遅れ系の周波数特性も低域フィルターの特性を有している．

$$G_{1,i}\frac{d^3q_i}{dt^3}+G_{2,i}\frac{d^2q_i}{dt^2}+G_{3,i}\frac{dq_i}{dt}+q_i=r(t) \tag{34}$$

$$\left[\frac{d^mq_i}{dt^m}\right]_{t=0}=0\qquad m=0,1,2 \tag{35}$$

$G_{1,i},G_{2,i},G_{3,i}$：正の定数

式(34),(35)の周波数伝達関数は，次式によって与えられる．

$$Z_{q,i}(j\omega)=\frac{1}{1-\omega^2G_{2,i}-j\omega(\omega^2G_{1,i}-G_{3,i})} \tag{36}$$

$Z_{q,i}(j\omega)$が$Z_{s,i,\delta}(j\omega)$を近似するように定めた$G_{1,i},G_{2,i},G_{3,i}$の値は，次式によって与えられる．

$$G_{3,i}=j\left[\frac{dZ_i}{d\omega}\right]_{\omega=0} \tag{37}$$

$$G_{2,i}=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{d^2Z_i}{d\omega^2}\right]_{\omega=0}+2G_{3,i}^2\right\} \tag{38}$$

$$G_{1,i}=\frac{1}{6}\left\{-j\left[\frac{d^3Z_i}{d\omega^3}\right]_{\omega=0}+12G_{2,i}G_{3,i}-6G_{3,i}^3\right\} \tag{39}$$

式(37)～(39)の詳しい誘導過程については,文献(2)を参照されたい．式(29)を式(37)～(39)に代入することによって式(40)～(42)を誘導できる．

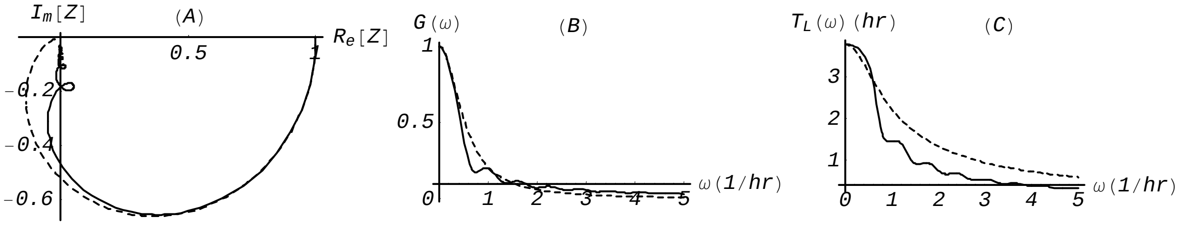
$$G_{1,i}=\frac{(1-p_s)t_{s,i,\delta}^3}{(1+p_s)^3(2+p_s)(3+p_s)} \tag{40}$$

$$G_{2,i}=\frac{t_{s,i,\delta}^2}{(1+p_s)^2(2+p_s)} \tag{41}$$

$$G_{3,i}=\frac{t_{s,i,\delta}}{(1+p_s)} \tag{42}$$

式(9)の値を採用すると，$G_{1,i}<0$となり斜面域では2次の遅れ系を考えると十分である．

次に，式(43)の値を用いた計算例を示す．



図－5　周波数特性

$$\alpha_{i,\delta} = 1800(m^{1/3}/hr) \quad l_{c,i,\delta} = 1000(m) \tag{43}$$

図－6(A)は採用した降雨波形と式(1), (2), (43)によるハイドログラフを示している．(B)の実線は，(A)の計算結果と式(17)を用いた $s\sim q$ 曲線を示している．破線は式(21)を表す．式(21)の貯留係数の値は式(44)のようになる．(C)の破線はこの貯留関数を用いた流出量を示し，実線は(A)のハイドログラフに等しい．

$$k = 7.0(hr^{3/5}mm^{2/5}) \tag{44}$$

図－6(A)の総降雨量は 26(mm)で，出水の継続時間を 20(hr)として平均降雨量 $\bar{r} = 1.3(mm/hr)$ を得る．この値と式(43)を式(30)に適用して次式を得る．

$$t_{s,i,\delta} = 10.1(hr) \tag{45}$$

さらに, 式(45)の値を式(41), (42)に適用して式(46)を得る．

$$G_{2,i} = 4.0(hr^2) \quad G_{3,i} = 3.8(hr) \tag{46}$$

図－6(D)の破線は，式(34), (46)より求めた流出量を表している．実線は(A)の kinematic wave 式より計算した流出量を表す．

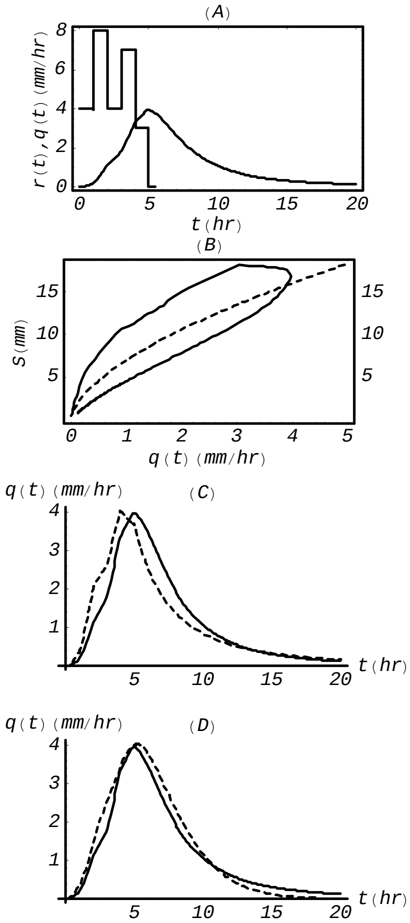
図－5 の破線は，式(46)の $G_{2,i}, G_{3,i}$ を式(36)に代入（$G_{1,i} = 0$）して求めた $Z_{q,i}(j\omega)$ の周波数特性を表している．(C)の時間遅れにおいて $\omega > 1(1/hr)$ の範囲で実線の値と破線の値に差があるように見える．しかし，(B)のゲイン図を見ると $\omega > 1(1/hr)$ の範囲で $G(\omega)$ が減衰して(C)の $\omega > 1(1/hr)$ の範囲で実線の値と破線の値との差を無視できる．

5.　まとめ

図－6(C), (D)に示すように，二つの集中化手法より得られたと貯留関数法と遅れ系による流出量の計算結果は, kinematic wave 式の流出量ほぼ一致していると言える．二つの集中化手法の本質的な相違点をまとめると以下のようになる．

(1) 空間平均法による集中化手法では，式(21)に示すように貯留係数が，$\alpha_{i,\delta}, l_{s,i,\delta}$ の関数になっており，降雨量に関係していない．

(2) 等価周波数伝達関数と遅れ系による集中化手法では式(30)の到達時間がパラメータになっており，$\bar{r}$ も式(45)の係数 $G_{2,i}, G_{3,i}$ に関与している．



図－6　流出量の計算例

謝辞　本論文は，実践水文システム研究会の研究補助を受けたものである．関係各位に謝意を表します．

参考文献

(1) 例えば，松林宇一郎，高木不折，古田直：不飽和浸透流理論に基づく斜面流出モデルの集中化について，土木学会論文集，No.497/Ⅱ-28，pp11-20，1994.

(2) 藤田睦博，Surakha Wanphen，田中岳，清水康行：モーメント法による流出モデルのパラメータの同定と Kinematic Wave 式に基づくパラメータの評価，土木学会論文集，No.733/Ⅱ-63，pp1-20，2003.