

## 越流による堤防法面侵食過程の数値シミュレーション

Numerical simulation of the erosion process of embankment slope by overflow

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 吉田智彦 (Tomohiko Yoshida)  
北海道大学大学院研究科 正会員 泉典洋 (Norihito Izumi)

## 1. まえがき

近年, 越流による破堤により, 甚大な洪水被害が報告されている。そのため, この現象を防ぐための対策が求められている。本研究は, 越流による堤防法面侵食過程を数値シミュレーションすることによって, 現象を把握することを目的とする。

流れは支配断面を計算する煩雑さを避けるために不定流として計算する。流れの計算には連続式と運動方程式に基づく, 水深方向に平均をとった浅水流方程式を用いる。河床変動は土砂の流入量と流出量の差から侵食量と堆積量を求めるのではなく, 粘着性の材料を仮定して, 侵食しか起こらないものとして計算する近似を行った。

## 2. 基礎式

式(1), (2)が一次元浅水流近似を行った保存形の連続式及び運動方程式である。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = R \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{n^2}{h^{1/3}} u^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで  $h$  および  $u$  はそれぞれ水深および流速,  $\eta$  は基準面からの底面高さ,  $g$  は重力加速度 ( $9.8 \text{ m/s}^2$ ) である。上の式では流線の湾曲を考慮せず, また静水圧分布を仮定している。河床抵抗としては Manning の平均流速公式を用いており,  $n$  は Manning の粗度係数である。

## 3. 数値計算法

流下方向座標  $x$ , および時間  $t$  をそれぞれ  $\Delta x$  と  $\Delta t$  の格子幅で離散化し,  $t$  軸方向に  $n$  番目の時間,  $x$  軸方向に  $j$  番目の位置での値を  $U_j^n$  と表す。計算は初期条件から, MacCormack 法に基づく離散化した式(3), (4)を基本とし, 逐次  $\Delta t$  後の水深と流速を求めていく。

<予測段階>

$$U_j^p = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n) + \Delta t R_j^n \quad (3)$$

<修正段階>

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_j^n + U_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^p - E_{j-1}^p) + \Delta t R_j^p \right) \quad (4)$$

MacCormack 法は, 予測段階では空間方向へ前進差分で近似して,  $\Delta t$  後の水深と流速を求める。上の式の添え字の  $p$  は予測段階で求めた値の意味である。これら水深と流速の予測値を空間全体で求め, この予測値から空間方向へ後進差分で近似して  $2\Delta t$  後の水深と流速を求める。もとの値と  $2\Delta t$  後の平均をもって  $\Delta t$  後の水深と流速とすることを修正段階の式は表している。MacCormack 法はプログラムが立てやすく, 2次精度を維持できる利点がある。

また次式の様に人工粘性項を加える。

<予測段階>

$$U_j^p = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (E_{j+1}^n - E_j^n) + (V_{j+1}^n - V_j^n) \right) + \Delta t R_j^n \quad (5)$$

<修正段階>

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ U_j^n + U_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (E_j^p - E_{j-1}^p) - (V_j^p - V_{j-1}^p) \right) + \Delta t R_j^p \right\} \quad (6)$$

<人工粘性項>

$$V_j^n = k(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (7)$$

MacCormack 法等の 2 次精度スキームは, 跳水部分等の不連続部分で一般に単調性が維持できず, 振動が時間とともに発達し, 計算が続けられなくなってしまう。そこで上式のような人工粘性項を加える。この形の人工粘性項は短波長の局所的振動を抑制する作用がある。特に本研究で取り扱うような常・斜流混在流れでは人工粘性項なしでは発散してしまうことが予想される。 $k$  は試行によって得られる定数で, 小さいことが望まれる。

## 4. 境界条件

MacCormack 法による計算では, 上流端と下流端の 2 点における水深と流速を求めることが出来ない。よって 4 つの境界条件を必要とする。4 つの境界条件としては, 次のようにする。まず上流端では流量を与え, 上流端とそのとなりの点との流速とが等しいとおく。また下流端では流速を与えて, 下流端とそのとなりの点との流量が等しいとする。

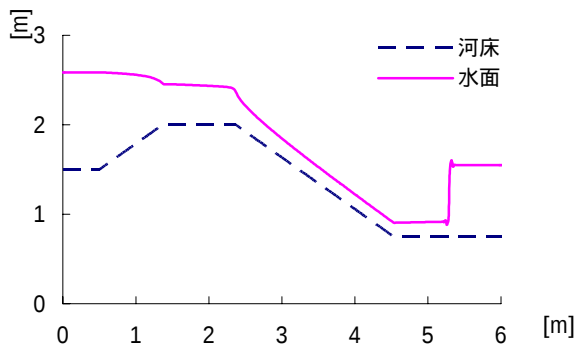


図 - 1 水面の計算結果

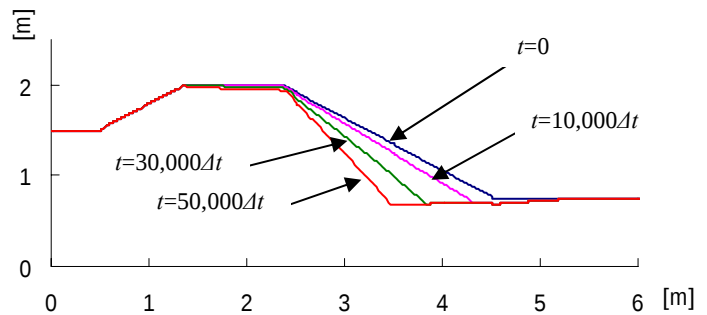


図 - 2 侵食過程のシミュレーション

### 5. C.F.L 条件

$\Delta t$ を決める際は (8)式で表される C.F.L 条件を用いる.

$$\Delta t = \frac{Cr\Delta x}{u + \sqrt{gh}} \quad 0 < Cr < 1 \quad (8)$$

上式は、物理的な信号の伝達速度と数値的な信号の伝達速度の比を表すクーラン数  $Cr$  が1以下にならなくてはならないことを意味している. つまり、数値的な影響領域が物理的な特性領域を包括するための条件である. 実際の計算では安定な計算を行うためにクーラン数  $Cr$  を0.2程度以下で計算をすることが多い.<sup>2)</sup>しかし安定に計算を行うことさえ出来れば、 $\Delta t$ をなるべく大きくとったほうが計算時間の短縮のためにもよい. 本研究では、全ての点で式(8)より  $\Delta t$ を逐次計算し、一番小さな  $\Delta t$ を用いることによって、全ての点で  $Cr = 0.4 \sim 0.6$ 程度以下になるようにした.

### 5. 河床変動計算

まえがきに述べたように侵食のみを考えることから、底面高さの時間変化の計算には次のような式を用いる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\alpha u_*^m \quad (9)$$

$\eta$ の時間微分を、定数  $\alpha$ と摩擦速度  $u_*$ の  $m$ 乗によって表す.  $m$ は1~4とした. 摩擦速度は Manning の式を変更した以下の式から求めている.

$$u_* = \frac{n\sqrt{g}}{h^{1/6}} u \quad (10)$$

### 6. 計算結果

侵食が始まる以前の堤防の法面形状は図-1の破線のような形を考える. 法面の勾配は30度とし、法面長さは2mとした. 境界条件として上流端で単位幅流量  $0.8 \text{ m}^2/\text{s}$ 、下流端で流速  $1.0 \text{ m/s}$ を与える場合の水面形状は図-1に実線として示した. 跳水部分での振動は完全にはなく

なっていないが、十分に抑えられているのがわかる. 全ての点で単位幅流量を計算すると、跳水部分で多少振動するものの全領域でほぼ一様となっている. 天端部分での限界水深も単位幅流量から計算したものとほぼ一致した.

図-2は侵食による堤防法面の形状変化を示したものである. 式(9)中の  $\alpha$ および  $m$ としては、 $\alpha = 0.005$ ,  $m = 3$ を用いた.  $t = 0$ が図-1で示した堤防の初期であり、それから時間の経過とともに  $t = 10,000\Delta t$ ,  $t = 30,000\Delta t$ ,  $t = 50,000\Delta t$ における堤防の形状を示した. 侵食が大きくなっていく様子がみてとれる. 法面全体が侵食しているが、堤防下での侵食が一番激しい.  $t = 50,000\Delta t$ 後の計算結果には天端先付近に凸凹を確認する事が出来るが、堤防の法下部分は変わらないことが見て取れる. またこの先も計算しつづけることが可能であることが確認された.

### 7. あとがき

MacCormack 法と人工粘性項の利用により、常・斜流の遷移部分や、跳水の不連続部分を良好に再現することが出来た. 侵食過程の計算では、河川の流れと侵食計算を交互に行って底面の侵食を表し、堤防先の侵食量が顕著であることをシミュレーションによって示した. ただし、勾配が急なってくると式(1)および(2), (9)の修正が必要となる. これらについては今後の課題である.

### 参考文献

- 1) 吉川秀夫編著: 流砂の水理学, pp267~pp269, 1985.
- 2) 藤井考蔵著: 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1994.
- 3) (社)砂防学会 編: 山地河川における河床変動の数値計算法, 2000.
- 4) 数値流体力学編集委員会 編: 数値流体力学シリーズ2, 圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 1995.