

Bagnold 仮説を用いた河床デューンの線形安定解析

Linear stability analysis of fluival dunes by the use of Bagnold's hypothesis

北海道大学大学院工学研究科 ○学生会員 佐藤博重(Hiroshige Sato)
北海道大学大学院工学研究科 正会員 泉典洋(Norihiro Izumi)

1. まえがき

フルード数がある程度小さい時、河床にはデューンと呼ばれる水深の数割程度の波高を持った河床波が形成されることが知られている。デューン河床はフルード数の増加とともに平坦床へと遷移し、減少とともにデューン河床へと再び遷移する。ところがこの遷移時に、デューン河床-平坦床遷移の際の臨界フルード数の方が、平坦床-デューン河床遷移の際の臨界フルード数より大きいという、いわゆるヒステリシス現象が現れることが知られている。

Colombini は定剪断層近似より実際の乱流をよりよく表現できる混合距離仮説を用いて Runge-Kutta 積分によるシューティング法を用いて線形安定解析を行っている¹⁾。しかし Colombini は、実験測定結果としてデューン形成後のフルード数を用いて計算結果との比較を行い、その計算結果が妥当であるとしている。線形安定解析では、平坦床に対し微小な擾乱を与えることによって基本状態である平坦床の安定性を調べるので、平坦床の安定性を支配するパラメータとして用いるのは、デューンが生じる前の平坦床に対応するフルード数でなければならない。また Colombini はサルテーション高さに関する従来の実験結果から掃流層厚さがシルズ数の 0.55 乗に比例するという式を用いて解析を行っている。本研究では、泉らが行った混合距離仮説及び Chebyshev 多項式展開に基づくスペクトル法を用いて行った線形安定解析²⁾を用いて解析を行うが、掃流層厚さを Bagnold 仮説に基づいたシルズ数に線形に比例したモデルを導入し Colombini が提案した掃流層厚さモデルの解析結果と比較する。また実験結果との比較の際に用いるパラメータとして、デューン発生前のフルード数を用いて比較しモデルの妥当性を検証する。

2. 定式化

Reynolds 平均 (乱流に関するアンサンブル平均) を取った二次元の Navier-Stokes 方程式は次のように表せる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - S^{-1} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 U および V はそれぞれ x および y 方向の流速、 S 及び P はそれぞれ平均河床勾配および圧力、 T_{ij} ($i, j = x, y$)

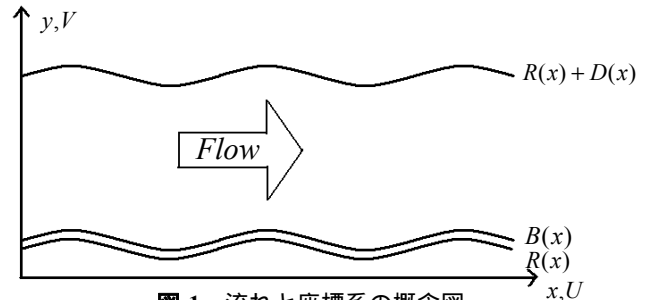


図-1 流れと座標系の概念図

はレイノルズ応力テンソルである。また上式における流速については平坦床基準状態における底面摩擦速度 U_{f0}^* で、座標については平坦床基準状態における水深 D_0^* で、圧力及びレイノルズ応力テンソルについては平坦床基準状態における河床剪断力 ρU_{f0}^* でそれぞれ無次元化している。混合距離仮説を用いるとレイノルズ応力テンソルは次のようになる。

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y}, T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (4a-c)$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, l = \kappa(y-Z) \left(\frac{D-y}{D} \right)^{1/2} \quad (4d,e)$$

ここで ν_T は $U_{f0}^* D_0^*$ で無次元化された渦動粘性係数、 l 及び Z, D はそれぞれ D_0^* で無次元化した混合距離および底面高さ、水深、 κ はカルマン定数 ($= 0.4$) である。流れ関数 ψ を用いて式(1)-(3)を書き直し、 P を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nu_T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

水面 ($y = R + D$) 及び参照面 ($y = R$) における境界条件はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{e}_{ns} &= 0 \\ \vec{e}_{ns} \cdot \vec{T} \cdot \vec{e}_{ns} &= 0 \\ \vec{e}_{ts} \cdot \vec{T} \cdot \vec{e}_{ns} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{at } y = R + D \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{e}_{nb} &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{e}_{tb} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{at } y = R \quad (7)$$

ここで R は流速が 0 となる位置 (参照面) の底面からの高さを表しており、 $\vec{u}$ は流速ベクトル ($= (u, v)$)、 $\vec{e}_{ns}$ 、 $\vec{e}_{ts}$ 及び $\vec{e}_{nb}$ 、 $\vec{e}_{tb}$ はそれぞれ水面及び掃流層上面に対する法線、接線方向の単位ベクトル、 $\vec{T}$ は応力テンソルである。

掃流層上面の高さ B の時間変化は、Exner 方程式と適当な掃流砂量式を組み合わせることで次式のように表せる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \Phi = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \quad (8a,b)$$

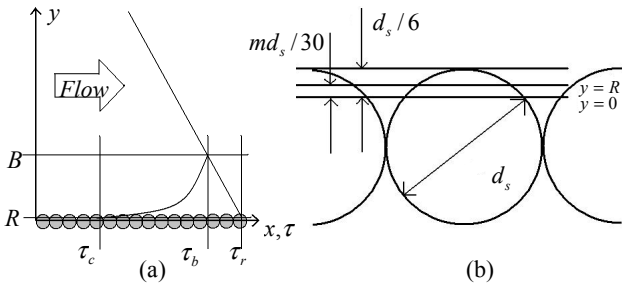


図-2 (a)掃流層の定義, (b)参照面と粒径の位置関係
ここで Φ は無次元掃流砂量($=q_s^*/(R_s g d_s^{*3})^{1/2}$), t は無次元時間($=d_s^*(R_s g d_s^{*3})^{1/2}/[D_0^*(1-\lambda_p)]^*$), B は掃流層上面高さ, λ_p は空隙率, R_s は砂粒子の水中比重($=1.65$)である. また θ_b は掃流層上面で評価した無次元掃流力, θ_c は限界掃流力であり, 次式で表される.

$$\theta_b = \frac{\tau_b^*}{\rho R_s g d_s^*} = \frac{DS}{R_s d_s^*} \tau_b, \theta_c = \theta_{ch} - \mu \left(S - \frac{\partial B}{\partial x} \right), \mu = \frac{\theta_{ch}}{\tan \psi}. \quad (9a-c)$$

Colombini¹⁾に倣って, 掃流層厚さ $h_b (= B - d_s/6)$ は次のように表されるものとする (図-2(a)参照).

$$h_b = \left[1 + 1.3 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^{0.55} \right] d_s \quad (10)$$

ここで τ_r は参照高さにおける底面剪断力, τ_c は限界剪断力である.

水面及び底面における境界条件を容易にするために次のような座標変換を導入する.

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - R(x)}{D(x)} \quad (11a, b)$$

この座標変換によって境界条件が与えられる位置 $y = R + D$ 及び $y = R$ はそれぞれ $\eta = 0$ 及び $\eta = 1$ となり, 混合距離 (4e) は次のように表される.

$$l = \kappa D \left(\eta + \frac{R-Z}{D} \right) \left(1 - \frac{R}{D} - \eta \right)^{1/2} \quad (12)$$

3. 線形安定解析

次のような摂動展開を導入する.

$$(\psi, P, D, Z, R, B) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0) + A(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1, \hat{B}_1) \quad (13)$$

$(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1) = (\psi_1, P_1, D_1, R_1) \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)]$ (14)
ここで α は擾乱の波数, Ω は擾乱の複素角速度である. 添え字 0 で表されているのが平坦基準状態における変数である. また平坦基準状態を支配方程式及び (4d, e) に適用し, 適当な境界条件を与えると平坦基準状態の流速 U_0 は

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (13)$$

となる. ここで $R_0 = md_s/30$ であり, $m = 1 \sim 3$ であるのから $R_0 = d_s/30 \sim d_s/10$ の関係がある (図-2(b)参照). 上式を水深方向に $\eta = 0$ から 1 まで積分すると, 平均流速 $\bar{U}_0$ 及び抵抗係数 C , R_0 の間に次の関係があることがわかる.

$$\bar{U}_0 = \frac{U^*}{u_*^*} = C^{-1} = \frac{1}{\kappa} \left\{ (1 + R_0) \ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right\} \quad (14)$$

$O(A)$ では, 式(5)は次式のようになる.

$$\mathcal{S}^v(\eta) \psi_1(\eta) + \mathcal{S}^D(\eta) D_1 + \mathcal{S}^R(\eta) R_1 = 0 \quad (15)$$

ここで $\mathcal{S}^\phi (\phi = \psi, D, R)$ は線形演算子を表しているが, 具体的な形についてはスペースの都合上省略する. 擾乱部

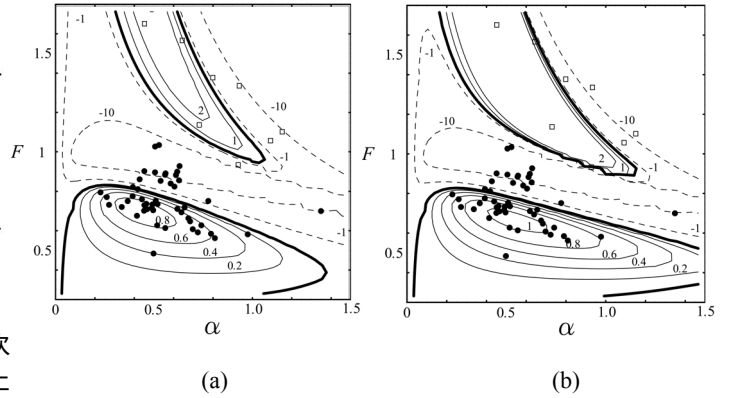


図-3 増幅率 Ω_i のコンタ (●: dunes, □: antidunes)

((a)式(10)を用いた場合, (b)式(17)を用いた場合)

分 (添え字 1 がついた部分) についての境界条件および, Exner 方程式(8a)等から, 式(15)は Ω を固有値とする Sturm-Liouville 型の固有値問題を構成していることが分かる. ここでは Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法を用いて解くと, 最終的に次のような関係が得られる.

$$\Omega = f(\alpha, F; C, \mu, m) \quad (16)$$

得られた Ω の虚部 Ω_i のコンタを $\alpha - F$ 平面状に示したのが図-3(a)である (同時に H.P.Guy らが行った実験データ³⁾ も示す). フルード数が小さい領域 (デューン) と大きい領域 (アンチデューン) に摂動の増幅率 Ω_i が正となる領域が現れている. 前述したように, 実験データはデューン, アンチデューンそれぞれが発生する前の平坦床での値をプロットしてある. デューンの領域では, 実験結果とよく一致しており, 領域外のプロット点についてはデューンの垂臨界分岐によるものだと考えられる. しかしアンチデューンに関してはあまり整合性は得られなかった. ここで Bagnold 仮説に基き, 式(10)を次のように改良する.

$$h_b = \left[1.75 + 0.37 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right) \right] d_s \quad (17)$$

大括弧内の式は, Sekine-Kikkawa らの実験データ⁴⁾ に基に算出した式である. 式(17)を採用し, 同様に線形解析を行うと増幅率のコンタ図は図-3(b)のようになる.

4. 考察

Bagnold 仮説に基き, 式(17)を用いた場合でもデューン領域と実験結果は一致している. アンチデューンの領域は式(10)を用いた場合よりは多少大きくなってはいるが, まだまだ実験データとの整合性はない. 今後はこの実験データとの整合性が取れるようなサルテーション高さの式を提案していきたい.

参考文献

- 1) M. Colombini: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *J.Fluid Mech.* (2004), vol.502, pp. 1-16
- 2) 泉典洋: 混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析, 水工学論文集, 第 51 巻, 2007 年 3 月
- 3) H. P. Guy et al.: Summary of Alluvial Channel Data From Flume Experiments, 1956-61, GEOLOGICAL SURVEY PROFESSIONAL PAPER 462- , 1966
- 4) M. Sekine et al.: Mechanics of saltating grains, *J.Hydraulic Engng* 118, 536-558