平成18年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第63号

# 合成断面を有する海洋パイプラインにおけるコアの力学的役割について

Mechanical role of elastic cores for offshore pipelines with structural pipe-in-pipe cross-sections

北海道大学工学部土木工学科　学生員　○嶋崎賢太（Kenta Shimazaki）
北海道大学大学院工学研究科　正　員　　佐藤太裕（Motohiro Sato）
北海道大学大学院工学研究科　正　員　　蟹江俊仁（Shunji Kanie）
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上　隆（Takashi Mikami）

## 1. はじめに

極大水深域において大きな静水圧を受ける海洋パイプラインは，耐崩壊性，耐熱性に優れた断面形状として，外側と内側のパイプの間に厚いコアを有する合成断面（パイプインパイプ断面）が有効であり，近年海洋工学分野では様々な角度から研究が行われている．本研究は静水圧を受ける合成断面を有する海洋パイプラインにおけるコアの力学的役割を明確にし，弾性座屈の観点から有意なコア厚さを算定することを目的とするものである．また弾性床上パイプの概念による簡易なモデル化を提案し，その妥当性，適用範囲に関する検討を行う．

## 2. 解析モデル

図- 1のような内側に弾性体のコアをもつパイプが外側から静水圧を受ける状態を平面ひずみ状態を仮定して考える．コアの内側の条件は剛パイプによる拘束と拘束なしの場合を考え、それぞれを比較する．

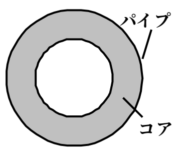


図- 1　断面形状

また，$h$ をパイプの厚さとし，$r_p$，$r_c$ をそれぞれパイプの中立軸までの半径（コアの外径）とコアの内径とし，添字の $p$，$c$ はそれぞれパイプとコアに関するものとする．

## 3. 静水圧作用による座屈現象の定式化

コアの変位を円周方向に $n$ 次の周期性を有すると仮定し，次式で表す．

$$w(r,\theta) = w_n(r)\cos n\theta \tag{1a}$$

$$v(r,\theta) = v_n(r)\sin n\theta \tag{1b}$$

ここで $w$ は半径方向，$v$ は接線方向の変位とする．このときのコアにおける応力分布は以下の式になる．[1)]

$$\sigma_{rn}(r) = -n(n+1)r^{-n-2}a_n - (n-1)(n+2)r^{-n}b_n$$
$$- n(n-1)r^{n-2}c_n - (n+1)(n-2)r^n d_n \tag{2a}$$

$$\tau_{r\theta n}(r) = -n(n+1)r^{-n-2}a_n - n(n-1)r^{-n}b_n$$
$$+ n(n-1)r^{n-2}c_n + n(n+1)r^n d_n \tag{2b}$$

ここで $a_n,\cdots,d_n$ は定数であり，上の式に sin 項，cos 項がかけられたものが応力分布となる．これに対応する変位は以下の式になる．

$$w_n(r) = \frac{r}{K_c}\Big\{n(1+\mu_c)r^{-n-2}a_n + \big[n(1+\mu_c)+2(1-\mu_c)\big]r^{-n}b_n$$
$$- n(1+\mu_c)r^{n-2}c_n - \big[n(1+\mu_c)-2(1-\mu_c)\big]r^n d_n\Big\} \tag{3a}$$

$$v_n(r) = \frac{r}{K_c}\Big\{n(1+\mu_c)r^{-n-2}a_n + \big[n(1+\mu_c)-4\big]r^{-n}b_n$$
$$+ n(1+\mu_c)r^{n-2}c_n + \big[n(1+\mu_c)+4\big]r^n d_n\Big\} \tag{3b}$$

ここで，$K = E/(1-\nu^2)$，$\mu = \nu/(1-\nu)$ であり，$E$，$\nu$ はそれぞれヤング率とポアソン比である．

まず，コアの内側に拘束がない場合を考える．したがって境界条件はコアの内側で応力が 0 であることである．$w_n(r_p) = 1$，$v_n(r_p) = 0$ として，$a_n,\cdots,d_n$ を消去し $x = r_c/r_p$ とおくと，

$$S_{11} \equiv \sigma_{rn}(r_p) = \frac{K_c}{r_p}\cdot T_{11} = \frac{K_c}{r_p}\cdot\frac{f_{11}(x)}{g(x)} \tag{4a}$$

$$S_{21} \equiv \tau_{r\theta n}(r_p) = \frac{K_c}{r_p}\cdot T_{21} = \frac{K_c}{r_p}\cdot\frac{f_{21}(x)}{g(x)} \tag{4b}$$

$$f_{11}(x) = -n^2(1+\mu_c)x^4 + 2(n^2-1)(3+\mu_c)x^2 - \big[2n+(1-\mu_c)\big]x^{2n+2}$$
$$+ \big[2n-(1-\mu_c)\big]x^{-2n+2} - n^2(5+\mu_c) + 8 \tag{5a}$$

$$f_{21}(x) = -n^3(1+\mu_c)x^4 + 2n(n^2-1)(1+\mu_c)x^2 - \big[n(1-\mu_c)+2\big]x^{2n+2}$$
$$- \big[n(1-\mu_c)-2\big]x^{-2n+2} - n\big[n^2(1+\mu_c)-4\big] \tag{5b}$$

$$g(x) = n^2(1+\mu_c)^2x^4 - 2(n^2-1)(1+\mu_c)^2x^2 + (1+\mu_c)(3-\mu_c)x^{2n+2}$$
$$+ (1+\mu_c)(3-\mu_c)x^{-2n+2} + n^2(1+\mu_c)^2 + 8(1-\mu_c) \tag{5c}$$

$w_n(r_p) = 0$，$v_n(r_p) = 1$ とし，同様にすると

$$S_{22} \equiv \tau_{r\theta n}(r_p) = \frac{K_c}{r_p}\cdot T_{22} = \frac{K_c}{r_p}\cdot\frac{f_{22}(x)}{g(x)} \tag{6a}$$

$$S_{12} \equiv \sigma_{rn}(r_p) = \frac{K_c}{r_p}\cdot T_{12} = \frac{K_c}{r_p}\cdot\frac{f_{12}(x)}{g(x)} \tag{6b}$$

$$f_{22}(x) = -n^2(1+\mu_c)x^4 - 2(n^2-1)(1-\mu_c)x^2 - \big[2n+(1-\mu_c)\big]x^{2n+2}$$
$$+ \big[2n-(1-\mu_c)\big]x^{-2n+2} + n^2(3-\mu_c) \tag{7a}$$

$$f_{12}(x) = -n^3(1+\mu_c)x^4 + 2n(n^2-1)(1+\mu_c)x^2 - \big[n(1-\mu_c)+2\big]x^{2n+2}$$
$$- \big[n(1-\mu_c)-2\big]x^{-2n+2} - n\big[n^2(1+\mu_c)-4\big] = f_{21}(x) \tag{7b}$$

ここで，$S_{ij}$ は単一の変位 $j$ による応力 $i$ を意味し，$j = 1,2$ はそれぞれ半径方向と接線方向の変位，$i = 1,2$ はそれぞれ各変位による位置 $(r_p, k\pi/n)$（$k$ は偶数）における垂直応力と位置 $(r_p, k\pi/2n)$（$k$ は奇数）におけるせん断応力を表すものとする．

次に，コアの内側に剛パイプがある場合を考える．コアの内側で変位 0 という条件の下で上と同様にすると

$$f_{11}(x)=-\left[n^2(1+\mu_c)+\frac{8(1-\mu_c)}{1+\mu_c}\right]x^4+2(n^2-1)(3+\mu_c)x^2$$
$$+\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[2n+(1-\mu_c)\right]x^{2n+2}-\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[2n-(1-\mu_c)\right]x^{-2n+2}$$
$$-n^2(5+\mu_c)+8 \qquad (8a)$$

$$f_{21}(x)=-n\left[n^2(1+\mu_c)+\frac{8(1-\mu_c)}{1+\mu_c}\right]x^4+2n(n^2-1)(1+\mu_c)x^2$$
$$+\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[n(1-\mu_c)+2\right]x^{2n+2}+\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[n(1-\mu_c)-2\right]x^{-2n+2}$$
$$-n\left[n^2(1+\mu_c)-4\right]=f_{12}(x) \qquad (8b)$$

$$f_{22}(x)=-\left[n^2(1+\mu_c)+\frac{8(1-\mu_c)}{1+\mu_c}\right]x^4-2(n^2-1)(1-\mu_c)x^2$$
$$+\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[2n+(1-\mu_c)\right]x^{2n+2}-\frac{3-\mu_c}{1+\mu_c}\left[2n-(1-\mu_c)\right]x^{-2n+2}$$
$$+n^2(3-\mu_c) \qquad (8c)$$

$$g(x)=\left[n^2(1+\mu_c)^2+8(1-\mu_c)\right]x^4-2(n^2-1)(1+\mu_c)^2x^2$$
$$-(3-\mu_c)^2x^{2n+2}-(3-\mu_c)^2x^{-2n+2}+n^2(1+\mu_c)^2+8(1-\mu_c) \qquad (8d)$$

これらを用いて変形時にパイプに蓄えられるポテンシャルエネルギーを求め，Trefftz 理論[2)]より得られる座屈時の方程式を解くと座屈荷重 $p_{cr}$ が以下のように求められる．

$$p_{cr}=\frac{1}{n^2-1}\left(a_{11}-\frac{a_{12}^{\,2}}{a_{22}}\right)$$
$$a_{11}=\beta+n^4\alpha+r_pS_{11} \qquad (9)$$
$$a_{12}=a_{21}=n\beta+n^3\alpha-r_pS_{12}$$
$$a_{22}=n^2(\alpha+\beta)+r_pS_{22}$$

ただし，$\alpha=K_pI/r_p^{\,3}, \beta=K_pA/r_p$，$\gamma_K=K_c/K_p$，$\gamma_h=r_p/h$，$A$，$I$ はそれぞれパイプの断面積と断面二次モーメントである．これを $S_{11}=S_{12}=S_{22}=0$ のときの座屈荷重 $p_0$ で除し，かつ $\alpha/\beta=I/Ar_p^{\,2}=1/12\cdot(h/r_p)^2<<1$ とすることにより，無次元化された座屈荷重が最終的に次式で表される．

$$p_{cr}/p_0=\frac{1}{3(n^2-1)}\Bigg\{1+n^4+12\gamma_h^{\,2}+\gamma_K\gamma_h(1+12\gamma_h^{\,2})T_{11}$$
$$-(1+12\gamma_h^{\,2})\left(n+\frac{n^3}{12\gamma_h^{\,2}}-\gamma_K\gamma_hT_{12}\right)^2\Bigg/\left(n^2+\gamma_K\gamma_hT_{22}\right)\Bigg\} \qquad (10)$$

## 4.　結果と考察

図- 2, 図- 3 は式(10)を用いて２通りのパイプの厚さについてコアの厚さと座屈荷重の関係を示したものである．また T₁₁ のみを考慮，つまり座屈現象が弾性床（Winkler foundation）上パイプで簡略化された場合の座屈荷重も示す．ただし，$\nu_p=0.3$，$\nu_c=0.4$ とした．

これらの図より，各ヤング率の比に対してコアがある厚さよりも厚くなるとコアの内側に拘束がない状態でも剛パイプで固定したときとほぼ同程度の強度を示し，かつそのときの座屈荷重はコア厚によらず一定となることがわかる．このことはある一定以上のコア厚は弾性座屈という観点からは不要であることを示すものであり，構造設計上重要な意味を持つ．

図- 4 は内側の拘束の有無により座屈荷重が変化するコア厚の下限値（内径/外径比の上限値）をプロットしたものである．これらの点より内径/外径比が小さい，つまりコアが厚い場合には，内側パイプの拘束状態や剛性が座屈荷重に寄与しないこととなる．また弾性床上パイプによる簡略化したモデル化は，座屈波形を示す $n$ の値が小さくなる $h/r_p=0.02$，$E_c/E_p<0.001$ のとき以外ではあまり誤差のない結果が得られることがわかる．これより，弾性床上パイプによるモデル化は簡単ではあるが，比較的柔軟で厚いコアを有する場合，また外側パイプ厚が相対的に薄い場合に適用可能であるといえる．

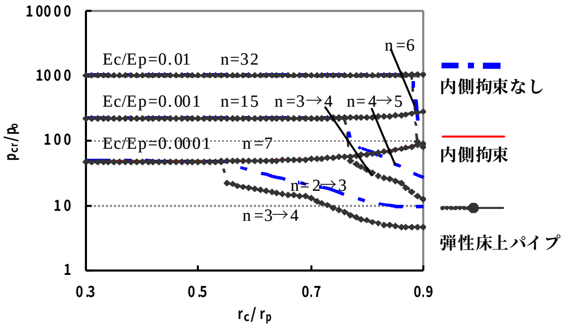


**図- 2　座屈荷重（$h/r_p$=0.01）**

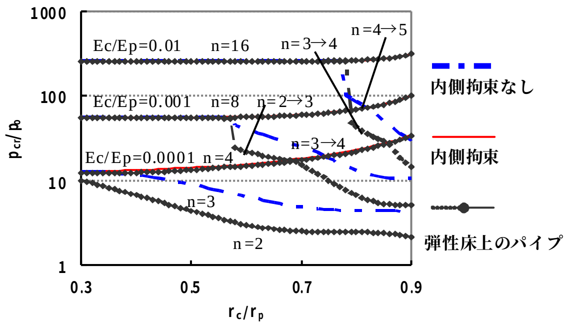


**図- 3　座屈荷重（$h/r_p$=0.02）**

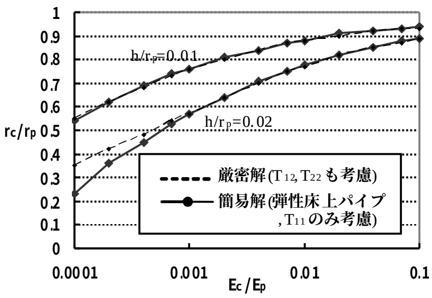


**図- 4　座屈荷重が変化するコア厚の下限値**

## 5.　まとめ

本研究は合成断面（パイプインパイプ断面）を有する海洋パイプラインにおける，静水圧作用時の座屈荷重とコア厚の関係に焦点を絞り解析的に検討を行ったものである．この結果必要以上のコア厚は座屈荷重の増加に寄与しないこと，また提案した弾性床上パイプによる簡易なモデル化でも十分座屈荷重を評価可能であることを示した．今後は円筒殻理論に基づく定式化，初期不整，非線形性の影響について検討していく予定である．

## 参考文献

1）James G. A. Croll: Buckling of Cylindrical Tunnel Liners, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.127, No.4, 333-341, 2001.
2）D.O.Bruth and B.O.Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975.